گزینه دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی

پاسخ تشریحی

آزمون سراسری سال ۱۴۰۳

(تیر ماه ۱۴۰۳)

گروه آزمایشی علوم ریاضی

(داخل کشور)

ریاضیات

۱- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (فصل ۱، درس ۲)

نکته: به‌طورکلی در هر معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ اگر جمع ریشه‌ها S و ضرب ریشه‌ها P باشد، این روابط برقرار است.

$$S=-\frac{b}{a}\ ,\ P=\frac{c}{a}$$

راه‌حل اول:

می‌دانیم قدرنسبت دنباله هندسی برابر تقسیم دو جملهٔ متوالی است، پس:

$$r=\frac{a_۵}{a_۴}=\frac{a_۸}{a_۷}\Rightarrow\frac{x-۱}{x+۱}=\frac{x}{۲x+۱}\Rightarrow x(x+۱)=(x-۱)(۲x+۱)\Rightarrow x^۲+x=۲x^۲-x-۱\Rightarrow x^۲-۲x-۱=۰$$

از حل معادلهٔ فوق دو مقدار برای x به‌دست می‌آید. قدرنسبت دنباله برابر است با:

$$r=\frac{a_۸}{a_۷}\Rightarrow r=\frac{x}{۲x+۱}$$

از آنجا که x در معادلهٔ $x^۲-۲x-۱=۰$ صدق می‌کند، پس:

$$x^۲=۲x+۱\Rightarrow x=\frac{۲x+۱}{x}\Rightarrow x=r$$

یعنی قدر نسبت دنباله هندسی همان x است، پس حاصل‌ضرب مقادیر ممکن برای قدرنسبت همان حاصل‌ضرب مقادیر x است.

در معادلهٔ $x^۲-۲x-۱=۰$ ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{c}{a}=-۱$ است. پس حاصل‌ضرب مقادیر ممکن برای قدرنسبت نیز برابر -۱ است.

توجه: سؤال کنکور دارای ایراد عملی است؛ زیرا با حل معادلهٔ $x^۲-۲x-۱=۰$، دو جواب به‌دست آمده یعنی $x_۱=۱+\sqrt{۲}$ و $x_۲=۱-\sqrt{۲}$، دنباله‌ای را می‌سازند که جملهٔ ششم آن از قاعدهٔ دنباله هندسی پیروی نمی‌کند. مثلاً به‌ازای $x=۱+\sqrt{۲}$ جملات چهارم، پنجم، هفتم و هشتم به‌صورت زیر است:

$$a_۴=x+۱=\sqrt{۲}+۲$$
$$a_۵=x-۱=\sqrt{۲}$$
$$a_۷=۲x+۱=۲\sqrt{۲}+۳$$
$$a_۸=x=\sqrt{۲}+۱$$

یعنی دنبالهٔ هندسی باید به‌صورت $\sqrt{۲}, ۲\sqrt{۲}+۳, a_۶, \sqrt{۲}+۲, \sqrt{۲}$ باشد، برای به‌دست آوردن $a_۶$ از دو روش مختلف به دو مقدار مختلف می‌رسیم.

$$a_۶=a_۵\times r=\sqrt{۲}(\sqrt{۲}+۱)=۲+\sqrt{۲}$$
$$a_۶=\frac{a_۷}{r}=\frac{۲\sqrt{۲}+۳}{\sqrt{۲}+۱}=\sqrt{۲}+۱$$

در مورد $x=۱-\sqrt{۲}$ نیز همین تناقض وجود دارد.

راه‌حل دوم:

می‌دانیم قدرنسبت دنباله هندسی برابر تقسیم دو جملهٔ متوالی است، پس:

$$r=\frac{a_۵}{a_۴}=\frac{a_۸}{a_۷}\Rightarrow\frac{x-۱}{x+۱}=\frac{x}{۲x+۱}\Rightarrow x(x+۱)=(x-۱)(۲x+۱)\Rightarrow x^۲+x=۲x^۲-x-۱\Rightarrow x^۲-۲x-۱=۰$$

اگر α و β ریشه‌های معادله فوق باشند، مجموع ریشه‌ها برابر $S=\alpha+\beta=۲$ و حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر $P=\alpha\beta=-۱$ است، پس برای مقادیر قدرنسبت یعنی، $r=\frac{x-۱}{x+۱}$ خواهیم داشت:

$$r_۱=\frac{\alpha-۱}{\alpha+۱}\ ,\ r_۲=\frac{\beta-۱}{\beta+۱}$$

حاصل‌ضرب مقادیر قدرنسبت r :
$$\frac{\alpha-۱}{\alpha+۱}\times\frac{\beta-۱}{\beta+۱}=\frac{\alpha\beta-\alpha-\beta+۱}{\alpha\beta+\alpha+\beta+۱}=\frac{P-S+۱}{P+S+۱}=\frac{-۱-۲+۱}{-۱+۲+۱}=\frac{-۲}{۲}=-۱$$

۲- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * آمار و احتمال (فصل ۱، درس ۱)

راه‌حل اول:

جدول ارزش گزارهٔ $((p \Rightarrow q) \wedge r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ را تشکیل می‌دهیم.

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge r$	$p \Rightarrow r$	$((p \Rightarrow q) \wedge r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	ن	ن	د
د	ن	د	ن	ن	د	د
د	ن	ن	ن	ن	ن	د
ن	د	د	د	د	د	د
ن	د	ن	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	د	د	د
ن	ن	ن	د	ن	د	د

بنابراین گزارهٔ $((p \Rightarrow q) \wedge r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$، همواره درست است.

راه‌حل دوم:

نکته: $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q \;,\; p \vee \sim p \equiv T \;,\; p \vee T \equiv T$

نکته: $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q \;,\; \sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

با استفاده از نکات فوق، داریم:

$$((p \Rightarrow q) \wedge r) \Rightarrow (p \Rightarrow r) \equiv ((\sim p \vee q) \wedge r) \Rightarrow (\sim p \vee r) \equiv \sim((\sim p \vee q) \wedge r) \vee (\sim p \vee r) \equiv (\sim(\sim p \vee q) \vee \sim r) \vee (\sim p \vee r)$$
$$\equiv ((p \wedge \sim q) \vee \sim r) \vee (\sim p \vee r) \equiv ((p \wedge \sim q) \vee \sim p) \vee (\sim r \vee r) \equiv ((p \wedge \sim q) \vee \sim p) \vee T \equiv T$$

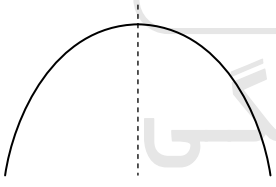
۳- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۲)

نکته: تابع f را در یک مجموعه، اکیداً صعودی می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار a و b در این مجموعه که $a < b$، آن‌گاه $f(a) < f(b)$. در فاصله‌ای که یک تابع اکیداً صعودی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، همواره روبه بالا خواهیم رفت.

می‌دانیم سهمی $y = ax^2 + bx + c$ در بازه‌های $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ یا $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ یا هر زیرمجموعه‌ای از یکی از این دو بازه اکیداً یکنواست؛ زیرا $-\frac{b}{2a}$ طول رأس سهمی است.

بنابراین سهمی $y = -5x^2 + ax - 8$ که یک سهمی روبه پایین است، در بازهٔ $\left(-\infty, \frac{-a}{-10}\right]$ اکیداً صعودی است و این بزرگ‌ترین بازه است، پس:

$$\frac{-a}{-10} = 2/5 \Rightarrow a = 25$$



بنابراین عرض رأس سهمی $y = -5x^2 + 25x - 8$ برابر است با:

$$y_S = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-(25^2 - 4(-5)(-8))}{4\times(-5)} = \frac{-(625 - 160)}{-20} = \frac{465}{20} = 23/25$$

۴- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۲)

نکته (قضیهٔ تقسیم برای چندجمله‌ای‌ها): اگر $f(x)$ و $p(x)$ چندجمله‌ای باشند و درجهٔ $p(x)$ از صفر بزرگ‌تر باشد، آن‌گاه چندجمله‌ای‌های منحصربه‌فرد $q(x)$ و $r(x)$ وجود دارند به‌طوری که:

$$f(x) = p(x)q(x) + r(x)$$

که در آن $r(x) = 0$ یا درجهٔ $r(x)$ از درجهٔ $p(x)$ کمتر است.

اگر $r(x)$ باقی‌مانده و $Q(x)$ خارج قسمت تقسیم $2 - x^{14}$ بر $x^2 + x + 1$ باشند، داریم:

$$2 - x^{14} = (x^2 + x + 1)Q(x) + r(x) \xrightarrow{\times(x-1)} (x-1)(2 - x^{14}) = (x^3 - 1)Q(x) + r(x)(x-1)$$

اگر x^3 را برابر یک قرار دهیم، آن‌گاه:

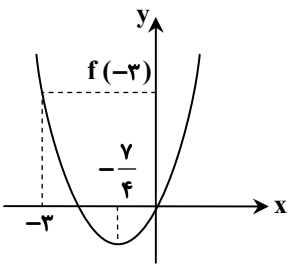
$$(x-1)(2 - x^{14}) \equiv r(x)(x-1) \Rightarrow 2 - x^{14} \equiv r(x) \Rightarrow r(x) \equiv 2 - (x^3)^4 \times x^2 \Rightarrow r(x) \equiv 2 - (1)^4 \times x^2$$
$$\xrightarrow{x^2 = -x - 1} r(x) \equiv 2 - (-x - 1) \Rightarrow r(x) = x + 3$$

۵- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (فصل ۱، درس ۲)

اولاً باید شرط اینکه معادله ۲ ریشه داشته باشد را بنویسیم:

$$\Delta > 0 \Rightarrow 7^2 - 4\times 2\times m > 0 \Rightarrow m < \frac{49}{8}$$

ثانیاً برای آنکه هر دو ریشه بزرگ‌تر از -3 باشد، می‌بایست مقدار عبارت $f(x) = 2x^2 + 7x + m$ به‌ازای -3 مثبت باشد. (با توجه به اینکه طول رأس سهمی یعنی $-\frac{7}{4}$ از -3 بزرگ‌تر است، هر دو ریشه نمی‌تواند از -3 کمتر باشد.)



$$f(-3) > 0 \Rightarrow 2\times 9 - 21 + m > 0 \Rightarrow m > 3$$

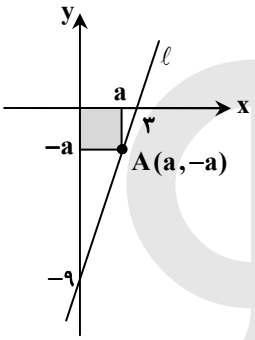
بنابراین اگر $3 < m < \frac{49}{8}$ معادله دارای دو ریشهٔ بزرگ‌تر از -3 است. سه مقدار صحیح ۴، ۵ و ۶ در این بازه وجود دارد.

۶- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۱، درس ۵)

راه‌حل اول:

برای آنکه چهارضلعی سایه زده شده مربع باشد، می‌بایست مختصات رأس A از مربع روی خط ℓ به‌صورت $A(a,-a)$ باشد.

معادلهٔ خط ℓ گذرنده از دو نقطهٔ $(3,0)$ و $(0,-9)$ به‌صورت زیر است:



$$y = \left(\frac{0-(-9)}{3-0}\right)x - 9 \Rightarrow y = 3x - 9$$

نقطهٔ $A(a,-a)$ روی این خط است.

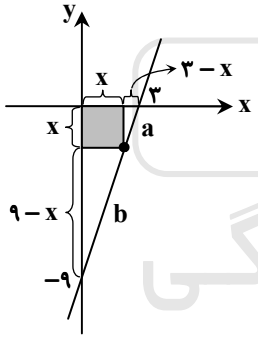
$$-a = 3a - 9 \Rightarrow 4a = 9 \Rightarrow a = \frac{9}{4}$$

طول قطر مربع $\sqrt{2}$ برابر طول ضلع آن است، پس طول قطر برابر است با:

$$\sqrt{2}a = \frac{9\sqrt{2}}{4} = \frac{9}{2\sqrt{2}}$$

راه‌حل دوم:

می‌توان به‌صورت هندسی به مسئله نگاه کرد، با استفاده از قضیهٔ تالس خواهیم داشت:



$$\left.\begin{aligned}\frac{3-x}{x} &= \frac{a}{b}\\ \frac{9-x}{x} &= \frac{b}{a}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{3-x}{x} = \frac{x}{9-x} \Rightarrow (9-x)(3-x) = x^2 \Rightarrow x^2 - 12x + 27 = x^2$$

$$\Rightarrow x = \frac{27}{12} = \frac{9}{4}$$

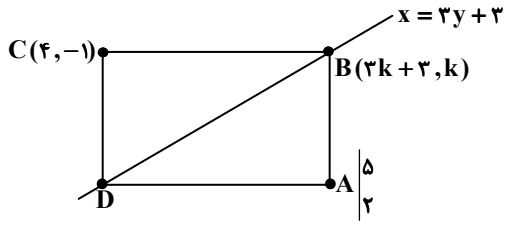
طول قطر مربع $\sqrt{2}$ برابر طول ضلع آن است، پس طول قطر برابر است با:

$$\sqrt{2}x = \frac{9\sqrt{2}}{4} = \frac{9}{2\sqrt{2}}$$

۷- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (فصل ۱، درس ۵)

نکته: اگر خطوط d_1 و d_2 به‌ترتیب با شیب‌های m_1 و m_2 بر هم عمود باشند، آن‌گاه $m_1 m_2 = -1$ و برعکس.

نقطهٔ B و D روی خط $x = 3y + 3$ هستند، پس مختصات آن‌ها به‌صورت $(3k+3,k)$ است. با توجه به مستطیل بودن چهارضلعی $ABCD$، پاره‌خط‌های AB و BC، همچنین پاره‌خط‌های AD و DC بر یکدیگر عمود هستند. پس ضرب شیب آن‌ها برابر منفی یک است.



$$m_{AB} \times m_{BC} = -1 \Rightarrow \frac{k-2}{3k+3-5} \times \frac{k-(-1)}{3k+3-4} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{k-2}{3k-2} = -\frac{3k-1}{k+1} \Rightarrow -(k-2)(k+1) = (3k-1)(3k-2)$$

$$\Rightarrow -k^2 + k + 2 = 9k^2 - 9k + 2 \Rightarrow 10k^2 - 10k = 0$$

$$\Rightarrow 10k(k-1) = 0 \Rightarrow k = 0, k = 1$$

یعنی مختصات نقاط B و D به‌صورت $B(3,0)$ و $D(6,1)$ بوده و اختلاف طول این دو نقطه برابر است با:

$$|x_B - x_D| = 6 - 3 = 3$$

۸- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۱، درس ۴)

نکته (ویژگی قدرمطلق):

$|x| \geq ۰$

راه‌حل اول:

تابع f وقتی $x \geq ۱$ و $x < ۱$ دو ضابطه مختلف دارد. $|a|$ همواره عددی نامنفی است. پس $|a| \leq ۱$ و $|a| > ۱$ ؛ بنابراین بـرای حـل معادلـهٔ مورد نظر داریم: (در حالت $a = ۰$ معادله دارای جواب نیست.)

$$f(۱-|a|) = f(۲+|a|) \Rightarrow ۲(۱-|a|)-۱ = (۲+|a|)^۲ - (۲+|a|) - ۷ \Rightarrow ۲-۲|a|-۱ = ۴+a^۲+۴|a|-۲-|a|-۷$$

$$\Rightarrow a^۲ + ۵|a| - ۶ = ۰ \Rightarrow (|a|+۶)(|a|-۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} |a| = -۶ \quad \text{غ ق ق} \\ |a| = ۱ \Rightarrow a = \pm ۱ \end{cases}$$ بنابراین دو مقدار برای a داریم.

راه‌حل دوم:

واضح است که $|a| = ۳$ ، پس اگر $\alpha = |a| + ۲$ و $\beta = |a| + ۲$ فرض کنیم، خواهیم داشت $f(\alpha) = f(\beta)$ با توجـه بـه اینکـه $|a|$ عددی نامنفی است، پس $\beta > ۱$ و $\alpha \leq ۱$ است؛ بنابراین برای حل معادله مورد نظر داریم:

$$f(\alpha) = f(\beta) \Rightarrow ۲\alpha - ۱ = \beta^۲ - \beta - ۷ \xrightarrow[\alpha = ۳-\beta]{\alpha+\beta=۳} ۲(۳-\beta)-۱ = \beta^۲ - \beta - ۷$$

$$۶ - ۲\beta - ۱ = \beta^۲ - \beta - ۷ \Rightarrow \beta^۲ + \beta - ۱۲ = ۰ \Rightarrow (\beta+۴)(\beta-۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \beta = -۴ \quad \text{غ ق ق} \ (\text{با شرط} \beta > ۱) \\ \beta = ۳ \end{cases}$$

در فرض داشتیم: $\beta = ۲ + |a|$ ، بنابراین:

$$۲ + |a| = ۳ \Rightarrow |a| = ۱ \Rightarrow a = \pm ۱$$

بنابراین دو مقدار برای a موجود است.

۹- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۲)

نکته: تابع f را در یک مجموعه، اکیداً نزولی می‌گوییم، اگر بـرای هـر دو مقـدار a و b در ایـن مجموعـه کـه $a < b$ ، آن‌گـاه $f(a) > f(b)$. در فاصله‌ای که یک تابع اکیداً نزولی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، همواره روبه پایین خواهیم رفت.

ابتدا دامنهٔ تابع را پیدا می‌کنیم:

$$۱ + x \geq ۰ \Rightarrow x \geq -۱$$

$$۱ - \sqrt{۱+x} \geq ۰ \Rightarrow \sqrt{۱+x} \leq ۱ \Rightarrow ۱ + x \leq ۱ \Rightarrow x \leq ۰$$

پس دامنه تابع f برابر $D_f = [-۱, ۰]$ است.

تابع f اکیداً نزولی است، پس برد آن به‌صورت $R_f = [f(۰), f(-۱)] = [۰, ۱]$ است.

با توجه به این دامنه و برد، نمودار تابع f در ربع دوم قرار دارد، پس نمودار $f^{-۱}$ در ربع چهارم قرار دارد، پس غیر از نقطهٔ مبدأ مختصات $O(۰,۰)$ این دو تابع نقطه تقاطع دیگری ندارند.

۱۰- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۳، درس ۳)

نکته: $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$

نکته: قانون توان لگاریتم:

$$\log_a b^n = n \log_a b$$

ابتدا معادلهٔ مورد نظر را حل می‌کنیم (دامنه معادله به‌صورت $۲ - x > ۰$ یعنی $x < ۲$ است).

$$\log(۲-x) - \log \frac{۱}{(x-۲)^۲} = ۳ \Rightarrow \log(۲-x) + \log(x-۲)^۲ = ۳ \Rightarrow \log(۲-x) + ۲\log|x-۲| = ۳$$

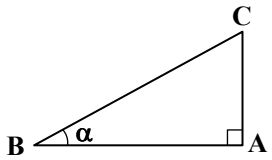
$$\xrightarrow{x<۲} \log(۲-x) + ۲\log(۲-x) = ۳ \Rightarrow ۳\log(۲-x) = ۳ \Rightarrow \log(۲-x) = ۱ \Rightarrow ۲ - x = ۱۰ \Rightarrow x = -۸$$

بنابراین مقدار خواسته شده برابر است با:

$$\log_{\sqrt{۲}}(-x) = \log_{\sqrt{۲}} ۸ = \log_{\frac{۱}{۲^{\frac{۱}{۲}}}} ۲^۳ = \frac{۳}{\frac{۱}{۲}} \log_۲ ۲ = ۶ \times ۱ = ۶$$

۱۱- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (فصل ۲، درس ۲)

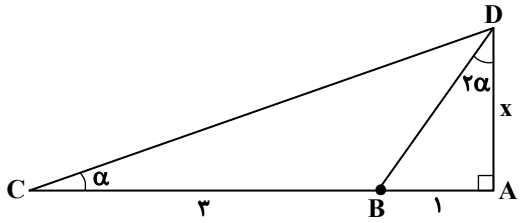
نکته: مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یکی از زوایای حادّهٔ آن α باشد را در نظر بگیرید. چهار نسبت مثلثاتی سینوس، کسینوس، تانژانت، کتانژانت زاویهٔ α به صورت زیر تعریف می‌شود:



$$\text{سینوس}: \sin\alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} \qquad \text{کسینوس}: \cos\alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}$$

$$\text{تانژانت}: \tan\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} \qquad \text{کتانژانت}: \cot\alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}}$$

در دو مثلث قائم‌الزاویه شکل مقابل، نسبت مثلثاتی تانژانت را می‌نویسیم:



$$\tan\alpha = \frac{x}{۳+۱} = \frac{x}{۴}$$

$$\tan ۲\alpha = \frac{۱}{x}$$

مقدار x را به کمک رابطهٔ $\tan ۲\alpha$ پیدا می‌کنیم:

$$\tan ۲\alpha = \frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha} \Rightarrow \frac{۱}{x} = \frac{۲\times\frac{x}{۴}}{۱-(\frac{x^۲}{۱۶})} \Rightarrow \frac{۱}{x} = \frac{\frac{x}{۲}}{\frac{۱۶-x^۲}{۱۶}} \Rightarrow \frac{۱}{x} = \frac{۸x}{۱۶-x^۲} = ۱۶-x^۲ = ۸x^۲ \Rightarrow ۹x^۲ = ۱۶ \Rightarrow x = \frac{۴}{۳}$$

در مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\triangle}{ABD}$ داریم:

$$BD^۲ = AB^۲ + AD^۲ \Rightarrow AB = \sqrt{۱+(\frac{۴}{۳})^۲} \Rightarrow AB = \frac{۵}{۳}$$

مقدار $\cos ۲\alpha$ برابر است با:

$$\cos ۲\alpha = \frac{AD}{BD} = \frac{\frac{۴}{۳}}{\frac{۵}{۳}} = \frac{۴}{۵}$$

۱۲- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۱ (فصل ۲، درس ۳)

نکته: اگر α زاویهٔ دلخواهی باشد، همواره داریم:

$$\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱$$

راه‌حل اول:

طرفین رابطهٔ داده‌شده را بر $\sin^۲x$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{۳\sin^۲x + a\cos^۲x}{\sin^۲x} = \frac{۴}{\sin^۲x} \Rightarrow ۳ + a(\frac{\cos^۲x}{\sin^۲x}) = ۴(\frac{۱}{\sin^۲x}) \Rightarrow ۳ + a\times\cot^۲x = ۴(۱+\cot^۲x)$$

$$\Rightarrow ۳ + a\cot^۲x = ۴ + ۴\cot^۲x \Rightarrow a\cot^۲x - ۴\cot^۲x = ۱ \Rightarrow \cot^۲x(a-۴) = ۱ \Rightarrow \cot^۲x = \frac{۱}{a-۴}$$

راه‌حل دوم:

سمت راست رابطه را به‌صورت $۴ = ۴\sin^۲x + ۴\cos^۲x$ بازنویسی می‌کنیم:

$$۳\sin^۲x + a\cos^۲x = ۴\sin^۲x + ۴\cos^۲x \Rightarrow a\cos^۲x - ۴\cos^۲x = \sin^۲x \Rightarrow (a-۴)\cos^۲x = \sin^۲x$$

طرفین عبارت فوق را بر $\sin^۲x$ تقسیم می‌کنیم:

$$(a-۴)\cot^۲x = ۱ \Rightarrow \cot^۲x = \frac{۱}{a-۴}$$

۱۳- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (فصل ۴، درس ۴)

نکته:

$$\tan^۲\alpha + ۱ = \frac{۱}{\cos^۲\alpha} \qquad (\cos\alpha \neq ۰)$$

نکته (نسبت‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا):

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

راه‌حل اول:

ابتدا مقدار $\cos(B-C)$ را پیدا می‌کنیم:

$$1+\tan^2(B-C)=\frac{1}{\cos^2(B-C)} \Rightarrow 1+(\sqrt{3})^2=\frac{1}{\cos^2(B-C)} \Rightarrow \cos^2(B-C)=\frac{1}{4} \Rightarrow \cos(B-C)=\pm\frac{1}{2}$$

با توجه به اینکه B و C دو زاویه مثلث هستند، زاویهٔ $B-C$ در ربع ۱ یا ۴ بوده و کسینوس آن مثبت است، پس $\cos(B-C)=\frac{1}{2}$

$$\cos(B-C)=\frac{1}{2} \Rightarrow \cos B\cos C+\sin B\sin C=\frac{1}{2} \Rightarrow 2\cos B\cos C+2\sin B\sin C=1$$

$$\Rightarrow 1-2\cos B\cos C=2\sin B\sin C$$

بنابراین مقدار خواسته شده برابر است با:

$$\frac{1-2\cos(B+C)}{4\sin B\cos C}=\frac{1-2\cos B\cos C+2\sin B\sin C}{4\sin B\cos C}=\frac{2\sin B\sin C+2\sin B\sin C}{4\sin B\cos C}=\frac{4\sin B\sin C}{4\sin B\cos C}=\frac{\sin C}{\cos C}=\tan C$$

راه‌حل دوم:

استفاده از حالت خالص: با توجه به اینکه $\tan 60^\circ=\sqrt{3}$، B و C را زوایایی فرض کنیم که $B-C=60^\circ$ باشد، مثلاً $C=30^\circ$ و $B=90^\circ$؛ بنابراین برای محاسبه عبارت مورد نظر، داریم:

$$\frac{1-2\cos(120^\circ)}{4\sin 90^\circ\cos 30^\circ}=\frac{1-2\times(-\frac{1}{2})}{4\times 1\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}=\tan 30^\circ=\tan C$$

۱۴- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۲، درس ۲)

نکته: جواب‌های کلی معادلهٔ $\cos x=\cos\alpha$ به‌صورت $x=2k\pi\pm\alpha$ می‌باشند که $k\in\mathbb{Z}$.

ابتدا معادله را در حالت کلی حل می‌کنیم:

$$\cos(2x-\frac{\pi}{4})=-\cos(x+\frac{\pi}{4}) \Rightarrow \cos(2x-\frac{\pi}{4})=\cos(\pi-(x+\frac{\pi}{4})) \Rightarrow \cos(2x-\frac{\pi}{4})=\cos(\frac{3\pi}{4}-x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x-\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{3\pi}{4}-x \\ 2x-\frac{\pi}{4}=2k\pi-\frac{3\pi}{4}+x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x=2k\pi+\pi \\ x=2k\pi-\frac{2\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{3} \\ x=2k\pi-\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

جواب‌های $\left\{-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{3}\right\}$ از این معادله در بازهٔ $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ قرار دارند.

۱۵- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۵، درس ۴)

نکته: برای رفع ابهام حالت $\frac{0}{0}$ رادیکالی، ابتدا مزدوج رادیکال را در آن ضرب می‌کنیم، سپس با تبدیل به چندجمله‌ای، آن را تجزیه می‌کنیم.

وقتی $x\to 0$، پس حد مخرج کسر $\frac{a+\sqrt{(bx+1)(cx+1)}}{x}$ برابر صفر است. پس برای آنکه حد تابع موجود باشد، می‌بایست حد صورت نیز برابر صفر باشد:

$$\lim_{x\to 0}(a+\sqrt{(bx+1)(cx+1)})=0 \xrightarrow{x=0} a+1=0 \Rightarrow a=-1$$

اکنون به محاسبه حد می‌پردازیم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-1+\sqrt{(bx+1)(cx+1)}}{x}\times\frac{\sqrt{(bx+1)(cx+1)}+1}{\sqrt{(bx+1)(cx+1)}+1}=\lim_{x\to 0}\frac{bcx^2+(b+c)x+1-1}{x(1+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{bcx+(b+c)}{2}=\frac{b+c}{2}$$

مقدار حد برابر ۲ است، پس:

$$\frac{b+c}{2}=2 \Rightarrow b+c=4 \Rightarrow \frac{b+c}{a}=\frac{4}{-1} \Rightarrow \frac{b}{a}+\frac{c}{a}=-4$$

۱۶- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (فصل ۳، درس ۱)

برای آنکه تابع f فقط یک مجانب قائم داشته باشد، سه حالت زیر قابل تصور است.

حالت اول: معادلهٔ مخرج درجه اول بوده و فقط یک ریشه داشته باشد: $a=0 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1$

حالت دوم: معادلهٔ مخرج درجه دوم بوده ولی فقط یک ریشه مضاعف داشته باشد: (ریشه مضاعف)

$$\Delta=0 \Rightarrow (1-a)^2-4a(a+1)=0 \Rightarrow a^2-2a+1-4a^2-4a=0 \Rightarrow 3a^2-6a+1=0$$

این معادله دو جواب دارد و به‌ازای هرکدام از آن‌ها تابع فقط یک مجانب قائم دارد.

حالت سوم: معادلهٔ مخرج درجه دوم بوده و دو ریشه هم داشته باشد، اما یکی از ریشه‌های آن ریشه صورت کسر هم باشد، در این حالت فقط ریشه غیرمشترک صورت و مخرج مجانب قائم است. صورت کسر دو ریشه دارد و به‌ازای هرکدام از آن‌ها یک مقدار قابل‌قبول برای a به‌دست می‌آید:

$$۳x^۲-۸x-۳=۰ \Rightarrow (۳x+۱)(x-۳)=۰ \Rightarrow x=-\frac{۱}{۳},۳$$

$$x=۳ \Rightarrow ۹a+۳(۱-a)+a+۱=۰ \Rightarrow ۷a+۴=۰ \Rightarrow a=-\frac{۴}{۷}$$

$$x=-\frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{۱}{۹}a+(-\frac{۱}{۳})(۱-a)+a+۱=۰ \Rightarrow a-۳+۳a+a+۱=۰ \Rightarrow a=\frac{۲}{۵}$$

بنابراین ۵ مقدار مختلف برای a وجود دارد که به‌ازای آن‌ها تابع یک مجانب قائم دارد.

۱۷- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (فصل ۵، درس ۵)

نکته (پیوستگی در نقطه): تابع f در نقطهٔ $x=a$ پیوسته است، هرگاه $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

راه‌حل اول:

تابع باید در نقاط با طول $\pm c$ پیوسته باشد، پس:

$$\lim_{x\to c^-} f(x)=\lim_{x\to c^+} f(x) \Rightarrow \sqrt{c^۲-۲c+۱}=ac^۲+bc+۲ \Rightarrow |c-۱|=ac^۲+bc+۲ \xrightarrow{c\in\mathbb{N}} c-۱=ac^۲+bc+۲ \quad (۱)$$

$$\lim_{x\to -c^+} f(x)=\lim_{x\to -c^-} f(x) \Rightarrow \sqrt{c^۲+۲c+۱}=ac^۲-bc+۲ \Rightarrow |c+۱|=ac^۲-bc+۲ \xrightarrow{c\in\mathbb{N}} c+۱=ac^۲-bc+۲ \quad (۲)$$

اگر دو معادلهٔ ۱ و ۲ را از یکدیگر کم کنیم، داریم:

$$(۱)-(۲)=۰ \Rightarrow -۲=۲bc \Rightarrow bc=-۱ \Rightarrow b=-\frac{۱}{c}$$

اکنون a را نیز بر حسب c پیدا می‌کنیم:

$$\xrightarrow{(۱)} c-۱=ac^۲+(-\frac{۱}{c})\times c+۲ \Rightarrow c-۱=ac^۲+۱ \Rightarrow ac^۲=c-۲ \Rightarrow a=\frac{c-۲}{c^۲}$$

بنابراین مقدار $\frac{a}{b}$ برابر است با:

$$\frac{a}{b}=\frac{\frac{c-۲}{c^۲}}{\frac{-۱}{c}} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{۲-c}{c} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{۲}{c}-۱$$

می‌دانیم c عددی طبیعی است، پس سه حالت زیر متصور است:

$$c=۱ \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{۲}{۱}-۱ \Rightarrow \left[\frac{a}{b}\right]=۱$$

$$c=۲ \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{۲}{۲}-۱ \Rightarrow \left[\frac{a}{b}\right]=۰$$

$$c\geq ۳ \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{۲}{c}=-۱ \Rightarrow -۱<\frac{a}{b}<۰ \Rightarrow \left[\frac{a}{b}\right]=-۱$$

بنابراین برای $\left[\frac{a}{b}\right]$ سه مقدار مختلف صفر، ۱ و ۱- قابل‌قبول است که تنها ۱- در گزینه‌ها آمده است.

راه‌حل دوم:

با توجه به اینکه مقدار c طبیعی است، $c=۳$ را جای‌گذاری می‌کنیم: (حالت خاص)

$$f(x)=\begin{cases}|x-۱| & |x|\leq ۳\\ ax^۲+bx+۲ & |x|>۳\end{cases}$$

می‌دانیم تابع f در $\mathbb{R}$ پیوسته است، پس پیوستگی را در $x=۳$ بررسی می‌کنیم:

$$\xrightarrow[x=۳]{\text{پیوستگی در}} ۲=۹a+۳b+۲ \Rightarrow ۹a+۳b=۰ \Rightarrow ۹a=-۳b \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{-۱}{۳} \Rightarrow \left[\frac{a}{b}\right]=-۱$$

۱۸- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۴، درس ۲)

نکته: توابع $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ مشتق‌پذیر هستند و داریم:

$$f'(x)=\cos x \quad و \quad g'(x)=-\sin x$$

مقدار خواسته شده یعنی $f'(\frac{7\pi}{6})-2g'(\frac{7\pi}{6})$ همان مشتق تابع $f-2g$ در $x=\frac{7\pi}{6}$ است، پس ابتدا تابع $f-2g$ را ساده می‌کنیم:

$$(f-2g)(x)=\frac{2^3+\cos^3 x}{2^2-\cos^2 x}-2\times\frac{2}{2-\cos x}=\frac{(2+\cos x)(4-2\cos x+\cos^2 x)}{(2+\cos x)(2-\cos x)}-\frac{4}{2-\cos x}=\frac{4-2\cos x+\cos^2 x-4}{2-\cos x}$$

$$=\frac{-\cos x(2-\cos x)}{2-\cos x}=-\cos x$$

اکنون به محاسبهٔ مشتق خواسته شده می‌پردازیم:

$$(f-2g)(x)=-\cos x \Rightarrow (f-2g)'(x)=-(-\sin x) \Rightarrow (f-2g)'(x)=\sin x \Rightarrow (f-2g)'(\frac{7\pi}{6})=\sin\frac{7\pi}{6}$$

$$\Rightarrow (f-2g)'(\frac{7\pi}{6})=-\frac{1}{2}$$

۱۹- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۴، درس ۲)

نکته: اگر f در a پیوسته باشد و مشتق راست و مشتق چپ در $x=a$:

الف) هر دو موجود (متناهی) ولی نابرابر باشند (نقطهٔ گوشه‌ای).

ب) یکی متناهی و دیگری نامتناهی باشد (نقطهٔ گوشه‌ای).

ابتدا مشتق تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x)=\begin{cases}0 & x<a\\ m(x-a)^{m-1} & x>a\end{cases}$$

تابع f فقط می‌تواند در نقطه‌ای به طول a مشتق نابرابر (نقطه گوشه‌ای) داشته باشد.

$$f'_-(a)=0 \Rightarrow f'_+(a)\neq 0$$

اگر $m>1$، مشتق راست تابع f در a نیز برابر صفر است و تابع نقطه گوشه‌ای ندارد.

اگر $m=1$، آن‌گاه $f'_+(a)=m$ و تابع در $x=a$ نقطه گوشه‌ای دارد.

اگر $m=0$، آن‌گاه $f'_-(a)=f'_+(a)=0$ و تابع نقطه گوشه‌ای ندارد.

اگر $m<0$، آن‌گاه تابع f در $x=a$ تعریف نشده است و $x=a$ نمی‌تواند نقطه گوشه‌ای باشد.

پس فقط به‌ازای $m=1$ تابع نقطه گوشه‌ای دارد.

۲۰- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (فصل ۵، درس ۱)

نکته (تعریف): اگر f یک تابع و $I\subseteq D_f$ یک همسایگی از نقطهٔ c (بازهٔ باز شامل نقطهٔ c) باشد که

الف) به‌ازای هر x متعلق به I داشته باشیم $f(x)\leq f(c)$، در این صورت $f(c)$ را یک ماکزیمم نسبی تابع f می‌نامیم.

ب) به‌ازای هر x متعلق به I داشته باشیم $f(x)\geq f(c)$، در این صورت $f(c)$ را یک مینیمم نسبی تابع f می‌نامیم.

نکته (تعریف): فرض کنیم $c\in D_f$. نقطهٔ به طول c را یک نقطهٔ بحرانی برای تابع f می‌نامیم، هرگاه $f'(c)$ برابر صفر باشد و یا $f'(c)$ موجود نباشد.

راه‌حل اول:

ابتدا دامنه تابع را تعیین می‌کنیم:

$$x(1-|x|)\geq 0$$

x	-1		0		1	
x	$-$	$-$	0	$+$		$+$
$1-\lvert x\rvert$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
$x(1-\lvert x\rvert)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$-$

$$D_f=(-\infty,-1]\cup[0,1]$$

تابع در نقاط مرزی دامنه مشتق ناپذیر است، پس $x=-1,0,1$ نقاط بحرانی تابع هستند. از طرفی از آنجا که تابع در همسایگی محذوف این نقاط مرزی تعریف نشده است، پس این نقاط اکسترمم نسبی محسوب نمی‌شوند.

برای یافتن سایر نقاط بحرانی و اکسترمم نسبی، ریشه‌های مشتق را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{x(1-|x|)} \Rightarrow f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+x^2} & x\le -1\\ \sqrt{x-x^2} & 0\le x\le 1\end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1+2x}{2\sqrt{x+x^2}} & x<-1\\ \dfrac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}} & 0<x<1\end{cases}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \begin{cases}x=-\dfrac{1}{2} \text{ غ ق ق} & x<-1\\ x=\dfrac{1}{2} & 0<x<1\end{cases}$$

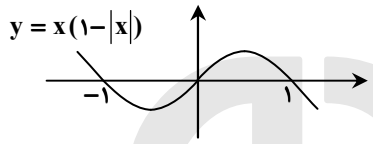
تنها ریشهٔ مشتق، $x=\frac{1}{2}$ است، پس این نقطه نیز بحرانی است. ضمناً علامت مشتق در اطراف $x=\frac{1}{2}$ تغییر می‌کند. پس این نقطه اکسترمم نسبی تابع است.

بنابراین تابع ۴ نقطهٔ بحرانی و یک اکسترمم نسبی دارد، یعنی:

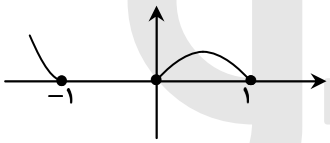
$$m+n+k=1+0+4=5$$

راه‌حل دوم:

سعی می‌کنیم شمای کلی نمودار را رسم کنیم. ابتدا نمودار $y=x(1-|x|)$ را رسم می‌کنیم:



با توجه به شکل فوق، پس از اعمال رادیکال $(f(x)=\sqrt{x(1-|x|)})$ نمودار به‌صورت حدودی به‌دست می‌آید:



بنابراین مطابق شکل، ۴ نقطهٔ بحرانی، صفر مینیمم نسبی و یک ماکزیمم نسبی داریم.

$(m=1, n=0, k=4)$

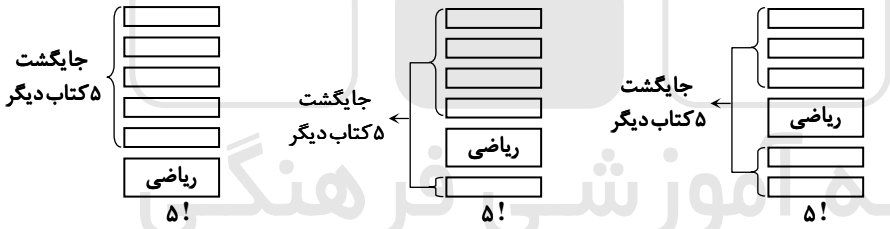
پس:

$$m+n+k=5$$

۲۱- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۱ (فصل ۶، درس ۲)

نکته: تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر $n!$ است.

طبق فرض سؤال، حالات مطلوب به‌صورت زیر است:



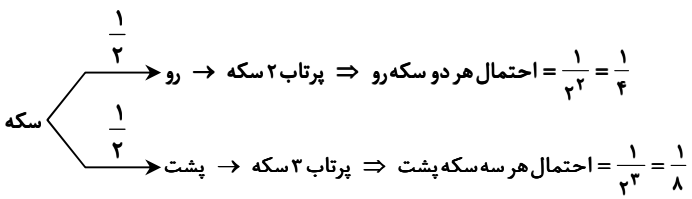
تعداد کل حالات $= 3\times 5! = 3\times 5\times 4\times 3\times 2 = 360$

۲۲- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * آمار و احتمال (فصل ۲، درس ۳)

نکته: فرض کنید $B_1, B_2, \cdots, B_n$ پیشامدهایی با احتمال ناصفر باشند که فضای نمونه را افراز می‌کنند. در این صورت، برای هر پیشامد دلخواه A، داریم:

$$P(A)=P(B_1)P(A\mid B_1)+P(B_2)P(A\mid B_2)+\cdots+P(B_n)P(A\mid B_n)=\sum_{k=1}^{n}P(B_k)P(A\mid B_k)$$

نمودار درختی زیر را در نظر می‌گیریم:



طبق قانون احتمال کل، داریم:

$$p=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{3}{16}$$

۲۳- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * آمار و احتمال (فصل ۳، درس ۳)

نکتهٔ ۱ (انحراف معیار داده‌ها): اگر n داده از جامعه به‌صورت $x_1, x_2, \cdots, x_n$ داشته باشیم، انحراف معیار آن‌ها را با نماد σ نشان می‌دهیم، که به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2 + (x_2-\bar{x})^2 + \cdots + (x_n-\bar{x})^2}{n}}$$

که در آن $x_i - \bar{x}$، را انحراف داده iاُم از میانگین داده‌ها می‌گویند.

نکتهٔ ۲ (واریانس داده‌ها): توان دوم انحراف معیار داده‌ها را واریانس داده‌ها گویند و آن را با نماد σ^2 نشان می‌دهیم.

طبق مفروضات سؤال، داده‌های دستهٔ اول را b,c,d,e,f و داده‌های دستهٔ دوم را a,b,c,d,e,f در نظر می‌گیریم. میانگین هر دو دسته برابر با $\bar{x}$ است و داریم:

$$\frac{b+c+d+e+f}{5} = \bar{x} \Rightarrow b+c+d+e+f = 5\bar{x} \quad (1)$$

$$\frac{a+b+c+d+e+f}{6} = \bar{x} \Rightarrow a+b+c+d+e+f = 6\bar{x} \xrightarrow{(1)} a+5\bar{x} = 6\bar{x} \Rightarrow a = \bar{x}$$

واریانس دستهٔ اول را σ_1^2 و واریانس دستهٔ دوم را σ_2^2 در نظر می‌گیریم و طبق فرض سؤال داریم:

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 + \frac{2}{3}$$

$$\frac{(b-a)^2+(c-a)^2+(d-a)^2+(e-a)^2+(f-a)^2}{5} = \frac{2}{3} + \frac{(a-a)^2+(b-a)^2+(c-a)^2+(d-a)^2+(e-a)^2+(f-a)^2}{6}$$

فرض می‌کنیم $A = (b-a)^2+(c-a)^2+(d-a)^2+(e-a)^2+(f-a)^2$، پس:

$$\frac{A}{5} = \frac{2}{3} + \frac{0+A}{6} \Rightarrow \frac{A}{5} - \frac{A}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{A}{30} = \frac{2}{3} \Rightarrow A = 20$$

خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$\sigma_1^2 = \frac{(b-a)^2+(c-a)^2+(d-a)^2+(e-a)^2+(f-a)^2}{5} = \frac{A}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

۲۴- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * آمار و احتمال (فصل ۲، درس ۳)

راه‌حل اول:

نکته: برای پیشامدهای A و B داریم:

الف) $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$

ب) $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

احتمال گل کردن پنالتی اول را با $P(A_1)$ و احتمال گل کردن پنالتی دوم را با $P(A_2)$ نشان می‌دهیم. طبق مفروضات سؤال داریم:

$$P(A_1) = \frac{60}{100} = 0/6 \ , \ P(A_2 \mid A_1) = \frac{80}{100} = 0/8 \ , \ P(A_2 \mid A_1') = \frac{30}{100} = 0/3$$

$$P(A_2 \mid A_1) = \frac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)} \Rightarrow 0/8 = \frac{P(A_2 \cap A_1)}{0/6} \Rightarrow P(A_2 \cap A_1) = 0/48$$

$$P(A_2 \mid A_1') = \frac{P(A_2 \cap A_1')}{P(A_1')} \Rightarrow 0/3 = \frac{P(A_2 \cap A_1')}{1-P(A_1)} \Rightarrow 0/3 = \frac{P(A_2 \cap A_1')}{1-0/6} \Rightarrow P(A_2 \cap A_1') = 0/3 \times 0/4 = 0/12$$

خواستهٔ سؤال $P(A_2 \cap A_1') + P(A_2' \cap A_1)$ است که داریم:

$$P(A_2 \cap A_1') + P(A_1 \cap A_2') = 0/12 + P(A_1 - A_2) = 0/12 + P(A_1) - P(A_1 \cap A_2) = 0/12 + 0/6 - 0/48$$

$$= 0/72 - 0/48 = 0/24$$

راه‌حل دوم:

نکته: اگر A و B دو پیشامد باشند که $P(A) > 0$، آن‌گاه $P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A)$.

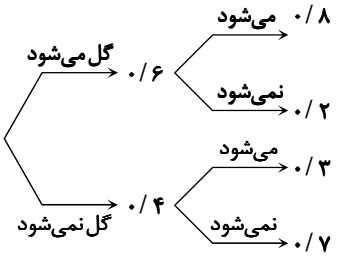
نکته: $P(A' \mid B) = 1 - P(A \mid B)$

با استفاده از نکات فوق، داریم:

$$P(A_1 \cap A_2') + P(A_1' \cap A_2) = P(A_1)P(A_2' \mid A_1) + P(A_1') \cdot P(A_2 \mid A_1') = 0/6(1-0/8) + (1-0/6) \times 0/3$$

$$= 0/6 \times 0/2 + 0/4 \times 0/3 = 0/12 + 0/12 = 0/24$$

راه‌حل سوم:

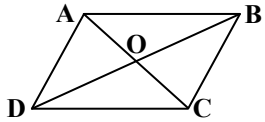


$$\Rightarrow (۰/۶)\times(۰/۲)+(۰/۴)\times(۰/۳)=۰/۱۲+۰/۱۲=۰/۲۴$$

۲۵- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۱ (فصل ۳، درس‌های ۱ و ۲)

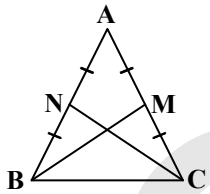
گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) درست؛ هر چهارضلعی که قطرها منصف یکدیگر باشند، متوازی‌الاضلاع است.



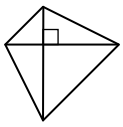
$$\left.\begin{matrix}OA=OC\\OB=OD\end{matrix}\right\}\Rightarrow ABCD \text{ متوازی‌الاضلاع است.}$$

۲) درست؛ میانه‌های وارد بر اضلاع مساوی در هر مثلث برابرند.

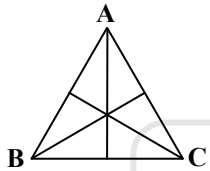


$$AB=AC\Rightarrow\begin{cases}BN=CM\\BC=BC\\A\hat{B}C=A\hat{C}B\end{cases}\Rightarrow \overset{\triangle}{MBC}\cong\overset{\triangle}{NBC}\Rightarrow BM=CN$$

۳) نادرست؛ در چهارضلعی مقابل، قطرها برابر و عمود بر هم هستند ولی چهارضلعی، مربع نمی‌باشد.

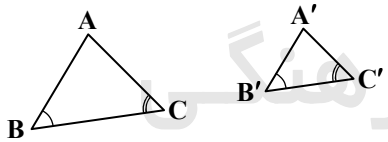


۴) درست؛ نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مثلث در یک نقطه همرس هستند.



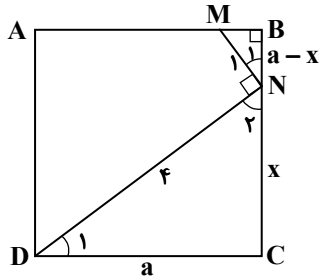
۲۶- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۱ (فصل ۲، درس ۳)

نکته: هرگاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلث دیگر هم‌اندازه باشند، دو مثلث متشابه‌اند.



$$(\hat{B}=\hat{B}',\hat{C}=\hat{C}'\Rightarrow \overset{\triangle}{ABC}\sim\overset{\triangle}{A'B'C'})$$

فرض می‌کنیم اندازهٔ ضلع مربع برابر a و $NC=x$ باشد:



$$\left.\begin{matrix}\hat{N}_۱+\hat{N}_۲=۹۰^\circ\\\hat{D}_۱+\hat{N}_۲=۹۰^\circ\end{matrix}\right\}\Rightarrow \hat{N}_۱+\hat{N}_۲=\hat{D}_۱+\hat{N}_۲\Rightarrow \hat{N}_۱=\hat{D}_۱$$

دو مثلث MBN و DCN متشابه هستند.

$$\left.\begin{matrix}\hat{N}_۱=\hat{D}_۱\\\hat{B}=\hat{C}=۹۰^\circ\end{matrix}\right\}\Rightarrow \overset{\triangle}{MBN}\sim\overset{\triangle}{DCN}\Rightarrow \frac{DN}{MN}=\frac{NC}{MB}=\frac{DC}{BN}\Rightarrow \frac{DN}{MN}=\frac{DC}{BN}$$

$$\Rightarrow \frac{۴}{۱}=\frac{a}{a-x}\Rightarrow a=۴a-۴x\Rightarrow ۴x=۳a\Rightarrow x=\frac{۳}{۴}a \quad (۱)$$

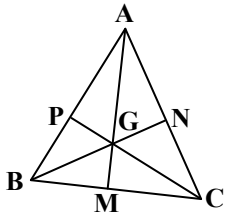
در مثلث DCN طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$DC^۲+CN^۲=DN^۲\Rightarrow a^۲+x^۲=۴^۲\xrightarrow{(۱)}a^۲+\frac{۹}{۱۶}a^۲=۱۶\Rightarrow \frac{۲۵}{۱۶}a^۲=۱۶$$

$$\Rightarrow a^۲=\frac{۱۶\times۱۶}{۲۵}\ ,\ S_{\text{مربع}}=a^۲=\frac{۱۶\times۱۶}{۲۵}=۱۰/۲۴$$

۲۷- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۱ (فصل ۳، درس ۲)

نکته: سه میانهٔ هر مثلث در یک نقطه درون آن مثلث همرس‌اند، به طوری که فاصلهٔ این نقطه تا وسط هر ضلع برابر $\frac{۱}{۳}$ اندازهٔ میانهٔ نظیر این ضلع است و فاصله‌اش تا هر رأس، $\frac{۲}{۳}$ اندازهٔ میانهٔ نظیر آن رأس است.

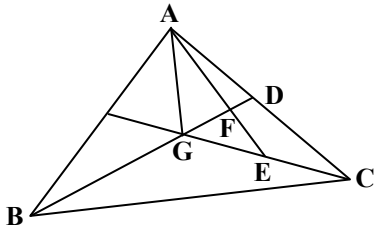


$$AG = ۲GM = \frac{۲}{۳}AM$$

$$GM = \frac{۱}{۲}AG = \frac{۱}{۳}AM$$

مشابه روابط فوق برای میانه‌های دیگر نیز برقرار است.

طبق نکتهٔ فوق، در مثلث ABC، نقطهٔ G محل همرسی سه میانهٔ مثلث است و داریم:



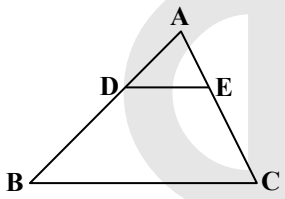
$$GD = \frac{۱}{۳}BD \quad (۱)$$

در مثلث AGC، GD و AE میانه‌ها هستند و نقطهٔ F محل همرسی میانه‌ها است و داریم:

$$FD = \frac{۱}{۳}GD \xrightarrow{(۱)} FD = \frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۳}BD \Rightarrow ۹FD = BD \Rightarrow \frac{BD}{FD} = ۹$$

۲۸- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۱ (فصل ۲، درس ۲)

نکته (تعمیم قضیهٔ تالس): اگر خطی دو ضلع مثلثی را در دو نقطه قطع کند و با ضلع سوم آن موازی باشد، مثلثی پدید می‌آید که اندازهٔ ضلع‌های آن با اندازهٔ ضلع‌های مثلث اصلی متناسب‌اند؛ مثلاً در شکل روبه‌رو داریم:

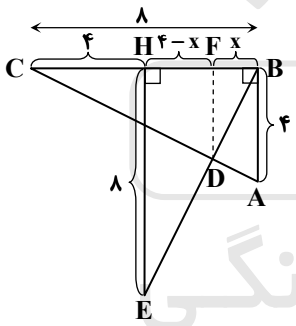


$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

با توجه به اینکه مثلث‌های ABC و BEH هم‌نهشت هستند، داریم:

$$BH = AB = ۴ \ , \ BC = EH = ۸ \qquad CH = BC - BH = ۸ - ۴ = ۴$$

فرض می‌کنیم $BF = x$، داریم:



$$FH = BH - BF = ۴ - x$$

در مثلث ABC با نوشتن تالس، داریم

$$\overset{\triangle}{ABC} : DF \parallel AB \Rightarrow \frac{CF}{CB} = \frac{DF}{AB} \Rightarrow \frac{۴ + ۴ - x}{۸} = \frac{DF}{۴} \Rightarrow \frac{۸ - x}{۲} = DF \quad (۱)$$

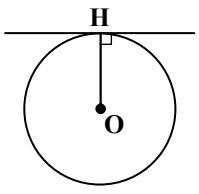
در مثلث BEH نیز رابطهٔ تالس را می‌نویسیم:

$$\overset{\triangle}{BEH} : DF \parallel EH \Rightarrow \frac{BF}{BH} = \frac{DF}{EH} \Rightarrow \frac{x}{۴} = \frac{DF}{۸} \Rightarrow DF = ۲x \quad (۲)$$

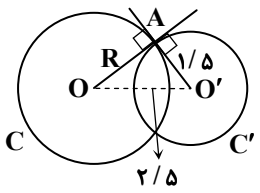
$$(۱),(۲) \Rightarrow \frac{۸ - x}{۲} = ۲x \Rightarrow ۸ - x = ۴x \Rightarrow ۸ = ۵x \Rightarrow x = \frac{۸}{۵} = ۱/۶$$

۲۹- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۲ (فصل ۱، درس ۲)

نکته: یک خط و یک دایره بر هم مماس‌اند. اگر و تنها اگر این خط در نقطهٔ تماس با دایره بر شعاع آن نقطه عمود باشد.



طبق شکل مقابل، در نقطهٔ A مماس‌های مرسوم بر دو دایره، بر هم عمودند و طبق نکتهٔ فوق، این خط‌های مماس از مرکز دایره‌ها گذشته و مثلث OAO' قائم‌الزاویه است و داریم:

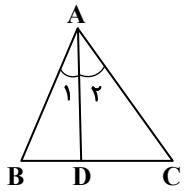


$$OA^۲ + O'A^۲ = OO'^۲ \Rightarrow R^۲ + ۱/۵^۲ = ۲/۵^۲ \Rightarrow R^۲ = ۲/۵^۲ - ۱/۵^۲$$

$$\Rightarrow R^۲ = (۲/۵ - ۱/۵)(۲/۵ + ۱/۵) = ۱\times۴ \Rightarrow R^۲ = ۴ \Rightarrow R = ۲$$

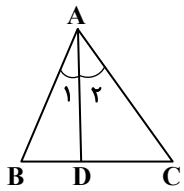
۳۰- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۲ (فصل ۳، درس ۳)

نکته: در هر مثلث، نیمساز هر زاویهٔ داخلی، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت اندازه‌های ضلع‌های آن زاویه تقسیم می‌کند.



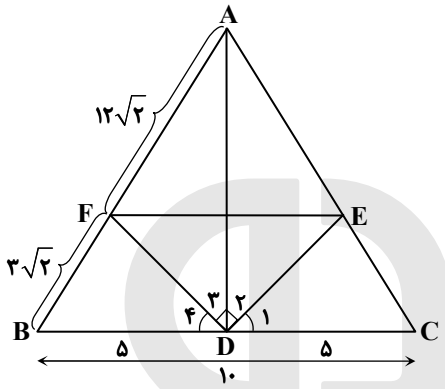
$$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CD}$$

نکته: در هر مثلث، مربع اندازهٔ هر نیمساز داخلی برابر است با حاصل‌ضرب اندازهٔ دو ضلع زاویه، منهای حاصل‌ضرب اندازهٔ دو قطعه‌ای که نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند.



$$AD^2=AB\cdot AC-BD\cdot DC$$

طبق نکات فوق، داریم:



$$\overset{\triangle}{ADB}\text{ نیمساز }DF \Rightarrow \frac{AF}{FB}=\frac{AD}{DB} \Rightarrow \frac{12\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}=\frac{AD}{5} \Rightarrow 4=\frac{AD}{5}$$

$$\Rightarrow AD=20$$

$$DF^2=AD\cdot DB-AF\cdot FB=20\times5-12\sqrt{2}\times3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow DF^2=100-72=28 \Rightarrow DF=2\sqrt{7}$$

$$\left.\begin{array}{l}\overset{\triangle}{ABD}\text{ نیمساز }DF \Rightarrow \frac{AF}{FB}=\frac{AD}{DB}\\ \overset{\triangle}{ADC}\text{ نیمساز }DE \Rightarrow \frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DC}\end{array}\right\} \xrightarrow{DC=DB} \frac{AF}{FB}=\frac{AE}{EC}$$

$$\Rightarrow EF\parallel BC \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{AF}{AB}=\frac{EF}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{12\sqrt{2}}{15\sqrt{2}}=\frac{EF}{10} \Rightarrow \frac{4}{5}=\frac{EF}{10} \Rightarrow EF=8$$

$$\hat{D}_1+\hat{D}_2+\hat{D}_3+\hat{D}_4=180^\circ \xrightarrow[\hat{D}_3=\hat{D}_4]{\hat{D}_1=\hat{D}_2} 2(\hat{D}_2+\hat{D}_3)=180^\circ \Rightarrow \hat{D}_2+\hat{D}_3=90^\circ$$

حال طبق رابطهٔ فیثاغورس در مثلث DEF داریم:

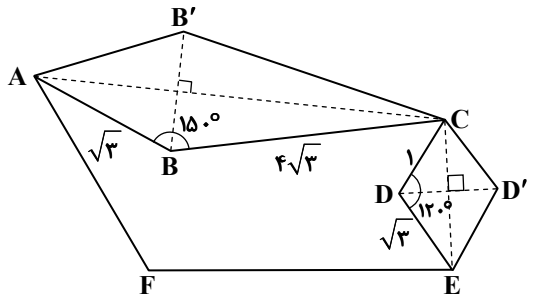
$$DE^2+DF^2=EF^2 \Rightarrow DE^2+(2\sqrt{7})^2=8^2$$

$$\Rightarrow ED^2=64-28=36 \Rightarrow DE=6$$

۳۱- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۲ (فصل ۲، درس ۲)

نکته: یکی از کاربردهای بازتاب، حل مسائلی است که به مسائل هم‌پیرامونی یا هم‌محیطی معروف است. در این‌گونه مسائل، هدف این است که بدون این‌که محیط یک چندضلعی تغییر کند، مساحت آن چندضلعی را تغییر دهیم.

طبق نکتهٔ فوق، بازتاب B را نسبت به AC یافته و B' می‌نامیم. همچنین بازتاب D را نسبت به CE یافته و D' می‌نامیم. میزان افزایش مساحت برابر است با:



$$S=2S_{ABC}+2S_{CDE}$$

$$=2\times\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot Sin150^\circ+2\times\frac{1}{2}CD\cdot DE\cdot Sin120^\circ$$

$$S=AB\cdot BC\cdot Sin30^\circ+CD\cdot DE Sin60^\circ$$

$$=\sqrt{3}\times4\sqrt{3}\times\frac{1}{2}+1\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S=6+\frac{3}{2}=7/5$$

۳۲- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۳ (فصل ۱، درس ۲)

نکته: اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، در این صورت وارون ماتریس A یعنی A^{-1} از تساوی زیر به‌دست می‌آید: $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\times\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

ابتدا ماتریس A را محاسبه می‌کنیم:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ ۱ & -\frac{۱}{۲} \end{bmatrix} \Rightarrow \left|A^{-1}\right|=۴(-\frac{۱}{۲})-۱\times(-۱)=-۲+۱=-۱ \Rightarrow A=(A^{-1})^{-1}=\frac{۱}{-۱}\begin{bmatrix} -\frac{۱}{۲} & ۱ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & -۱ \\ ۱ & -۴ \end{bmatrix}$$

حال طرفین رابطهٔ $۲I-۳A^{-۱}B^{-۱}=\begin{bmatrix} -۲ & -۴ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$ را از سمت چپ در A ضرب می‌کنیم:

$$A(۲I-۳A^{-۱}B^{-۱})=A\times\begin{bmatrix} -۲ & -۴ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow ۲AI-۳\underbrace{AA^{-۱}}_{I}B^{-۱}=A\times\begin{bmatrix} -۲ & -۴ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow ۲A-۳B^{-۱}=\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & -۱ \\ ۱ & -۴ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} -۲ & -۴ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۲ & -۱ \\ -۶ & ۰ \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های قطر اصلی = $-۲+۰=-۲$

۳۳- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (فصل ۱، درس ۱)

ابتدا $A^۲$ را محاسبه می‌کنیم:

$$A^۲=A\cdot A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ -۱ & -۲ & -۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ -۱ & -۲ & -۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های $A^۲$ = $۱+۱+۲+۱+۱=۶$

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ -۱ & -۲ & -۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه‌های A} = ۱+۱+۱-۱-۲-۱+۱+۱+۱=۲$$

خواستهٔ سؤال برابر است با: $\frac{۶}{۲}=۳$

۳۴- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (فصل ۲، درس ۳)

نکته: معادلهٔ سهمی افقی یا قائم با رأس $S(h,k)$ به‌صورت زیر است.

دهانهٔ سهمی	محور سهمی	خط هادی	کانون	معادلهٔ سهمی
روبه راست	خط $y=k$	$x=-a+h$	$(a+h,k)$	$(y-k)^۲=۴a(x-h)$
روبه چپ	خط $y=k$	$x=a+h$	$(-a+h,k)$	$(y-k)^۲=-۴a(x-h)$
روبه بالا	خط $x=h$	$y=-a+k$	$(h,a+k)$	$(x-h)^۲=۴a(y-k)$
روبه پایین	خط $x=h$	$y=a+k$	$(h,-a+k)$	$(x-h)^۲=-۴a(y-k)$

معادلهٔ سهمی را به‌صورت متعارف می‌نویسیم:

$$۳y^۲-۳x-ay=۰ \Rightarrow ۳y^۲-ay=۳x \xrightarrow{\div ۳} y^۲-\frac{a}{۳}y=x \Rightarrow y^۲-\frac{a}{۳}y+\frac{a^۲}{۳۶}=x+\frac{a^۲}{۳۶} \Rightarrow (y-\frac{a}{۶})^۲=(x+\frac{a^۲}{۳۶})$$

سهمی افقی روبه راست است و اگر فاصلهٔ کانونی سهمی را با a' نشان دهیم، داریم:

رأس سهمی $S(-\frac{a^۲}{۳۶},\frac{a}{۶}), ۴a'=۱ \Rightarrow a'=\frac{۱}{۴}$

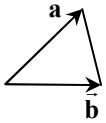
خط هادی: $x=-\frac{a^۲}{۳۶}-\frac{۱}{۴} \Rightarrow -\frac{a^۲}{۳۶}-\frac{۱}{۴}=-\frac{۵}{۴} \Rightarrow -\frac{a^۲}{۳۶}=-۱ \Rightarrow a^۲=۳۶ \Rightarrow a=\pm ۶$

خواستهٔ سؤال برابر است با:

$۶-(-۶)=۱۲$

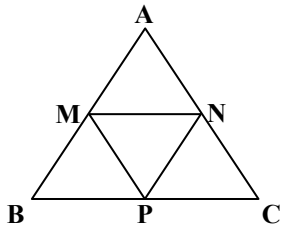
۳۵- پاسخ: گزینهٔ ۲ و ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (فصل ۳، درس ۲)

نکتهٔ ۱: مساحت مثلث ساخته شده بر روی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.



$$S_{\text{مثلث}} = \frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$$

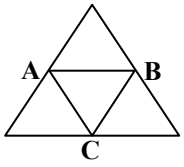
نکتهٔ ۲: اگر وسط‌های سه ضلع هر مثلث را به هم متصل کنیم، چهار مثلث هم‌نهشت و در نتیجه با مساحت‌های برابر پدید می‌آید.



$$\overset{\triangle}{AMN} \cong \overset{\triangle}{BMP} \cong \overset{\triangle}{PCN} \cong \overset{\triangle}{MNP}$$

$$S_{\overset{\triangle}{AMN}} = S_{\overset{\triangle}{BMP}} = S_{\overset{\triangle}{PCN}} = S_{\overset{\triangle}{MNP}} = \frac{1}{4}S_{\overset{\triangle}{ABC}}$$

طبق نکات فوق، مساحت مثلث ABC برابر است با:



$$S_{ABC} = \frac{1}{4}\times 64 = 16$$

حال بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ را تشکیل داده و داریم:

$$A(3,a,b), B(-1,-a,b), C(5,-4,b)$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-4,-2a,0)\ ,\ \overrightarrow{AC} = C - A = (2,-4-a,0)$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & -2a & 0 \\ 2 & -4-a & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}\begin{vmatrix} -4 & -2a \\ 2 & -4-a \end{vmatrix} = \vec{k}(-4(-4-a)-2(-2a))$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \vec{k}(16+4a+4a) = (8a+16)\vec{k}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}|8a+16| = |4a+8| \Rightarrow |4a+8| = 16 \Rightarrow 4a+8 = \pm 16 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -6 \end{cases}$$

$$a = 2 \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-4,-4,0) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{16+16+0} = 4\sqrt{2}$$

$$a = -6 \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-4,12,0) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{16+144} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$$

۳۶- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * گسسته (فصل ۱، درس‌های ۲ و ۳)

نکته: می‌توان به دو طرف یا یک طرفِ یک رابطهٔ هم‌نهشتی هر مضربی از پیمانه را اضافه یا از آن کم کرد.

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow \begin{cases} a+mt \overset{m}{\equiv} b+mk \\ a-mt \overset{m}{\equiv} b-mk \end{cases}$$

نکته: قضیهٔ تقسیم: اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد در این صورت، اعدادی صحیح و منحصربه‌فرد مانند q و r یافت می‌شوند به‌قسمی که $a = bq + r$ و $0 \le r < b$.

a مضرب ۸ است، پس $a \overset{8}{\equiv} 0$، از طرفی باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۲۳ برابر ۵ است، داریم:

$$a = 23q+5, a \overset{8}{\equiv} 0 \Rightarrow 23q+5 \overset{8}{\equiv} 0 \Rightarrow 23q \overset{8}{\equiv} -5 \Rightarrow (23-3\times 8)q \overset{8}{\equiv} -5 \Rightarrow -q \overset{8}{\equiv} -5 \Rightarrow q \overset{8}{\equiv} 5 \Rightarrow q = 8k+5$$

حال در رابطهٔ $a = 23q+5$، داریم:

$$a = 23(8k+5)+5 = 8\times 23k + 115 + 5 = 8\times 23k + 120 \Rightarrow \frac{a}{4} = \frac{8\times 23k}{4} + \frac{120}{4} \Rightarrow \frac{a}{4} = 23(2k) + 30 = 23(2k) + 23 + 7$$

$$\Rightarrow \frac{a}{4} = 23\underbrace{(2k+1)}_{q'} + 7 \Rightarrow \frac{a}{4} = 23q' + 7$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ $\frac{a}{4}$ بر ۲۳ برابر ۷ است.

۳۷- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * آمار و احتمال (فصل ۱، درس ۲)

با توجه به خواستهٔ سؤال، کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو زیرمجموعه، باید یکی زوج و دیگری مضرب ۵ باشد، پس حالات زیر را داریم:

min max
۱۲ , ۱۳ , ۱۵
↓
۲

min max
۱۵ , ۱۸ → ۱ حالت

min max
۱۵ , ۱۸ , ۲۳ , ۲۴ , ۲۵ , ۲۶
↓ ↓ ↓ ↓
۲× ۲ × ۲ × ۲=۱۶

min max
۲۴ , ۲۵ → ۱ حالت

min max
۱۲ , ۱۳ , ۱۵ , ۱۸ , ۲۳ , ۲۴ , ۲۵
↓ ↓ ↓ ↓ ↓
۲× ۲ × ۲ × ۲ × ۲=۳۲

min max
۱۵ , ۱۸ , ۲۳ , ۲۴
↓ ↓
۲ × ۲=۴

min max
۱۸ , ۲۳ , ۲۴ , ۲۵
↓ ↓
۲ × ۲=۴

min max
۲۵ , ۲۶ → ۱ حالت

تعداد کل حالات $= ۲+۳۲+۱+۴+۱۶+۴+۱+۱=۶۱$

۳۸- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * گسسته (فصل ۱، درس ۳)

نکته: شرط لازم و کافی برای آنکه معادلهٔ سیالهٔ $ax+by=c$ دارای جواب باشد، آن است که: $(a,b)\mid c$

نکته: می‌توان به دو طرف یا یک طرفِ یک رابطهٔ هم‌نهشتی هر مضربی از پیمانه را اضافه یا از آن کم کرد.

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow \begin{cases} a+mt \overset{m}{\equiv} b+mk \\ a-mt \overset{m}{\equiv} b-mk \end{cases}$$

طبق نکتهٔ فوق، شرط آنکه معادله سیالهٔ $۵۷x+۱۳۳y=۲۲n-۱$ دارای جواب باشد، آن است که داشته باشیم:

$$(۵۷,۱۳۳)\mid ۲۲n-۱\ ,\ (۵۷,۱۳۳)=(۱۹\times ۳,۱۹\times ۷)=۱۹ \Rightarrow ۱۹\mid ۲۲n-۱ \Rightarrow ۲۲n-۱ \overset{۱۹}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۲۲n \overset{۱۹}{\equiv} ۱ \Rightarrow (۲۲-۱۹)n \overset{۱۹}{\equiv} ۱$$

$$\Rightarrow ۳n \overset{۱۹}{\equiv} ۱-۱۹ \Rightarrow ۳n \overset{۱۹}{\equiv} -۱۸ \xrightarrow[\div ۳]{(۳,۱۹)=۱} n \overset{۱۹}{\equiv} -۶ \Rightarrow n=۱۹k-۶$$

چون کوچک‌ترین عدد دورقمی n را باید بیابیم، داریم:

$$k=۱ \Rightarrow n=۱۹-۶=۱۳ \Rightarrow \text{مجموع ارقام}=۱+۳=۴$$

۳۹- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * گسسته (فصل ۳، درس ۲)

$$\boxed{۱۴},\boxed{۱۵},۱۶,\boxed{۱۷},\boxed{۱۸},۱۹,\boxed{۲۰},\boxed{۲۲},\boxed{۲۳},۲۴,\boxed{۲۵},\boxed{۲۶},۲۷,\boxed{۲۸}$$

بدترین حالت زمانی است که اعداد مشخص شده در فوق انتخاب شوند، که تعداد آن‌ها برابر ۱۰ عدد است. با انتخاب یک عدد دیگر، لااقل سه عضو انتخاب شده، اعداد متوالی خواهند بود، پس حداقل تعداد اعضا برابر $۱۱=۱+۱۰$ است.

۴۰- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * گسسته (فصل ۲، درس ۱)

نکته: اگر G یک گراف n رأسی باشد، مقدار $q(G)+q(\bar{G})$ برابر است با:

$$q(G)+q(\bar{G})=\binom{n}{۲}=\frac{n(n-۱)}{۲}$$

نکته: اگر G یک گراف با n رأس و u یک رأسِ آن باشد و $d_G(u)$ و $d_{\bar{G}}(u)$ به‌ترتیب درجهٔ رأس u در گراف‌های G و $\bar{G}$ باشند، داریم:

$$d_G(u)+d_{\bar{G}}(u)=n-۱$$

فرض می‌کنیم تعداد رئوس گراف G برابر P باشد، با توجه به اینکه رأس با درجهٔ مینیمم در G، رأس با درجهٔ ماکزیمم در $\bar{G}$ است و بالعکس، طبق نکته فوق، داریم:

$$\begin{cases} \Delta(G)+\delta(\bar{G})=P-۱ \Rightarrow \delta(\bar{G})=P-۱-\Delta(G) \\ \delta(G)+\Delta(\bar{G})=P-۱ \Rightarrow \Delta(\bar{G})=P-۱-\delta(G) \end{cases} \Rightarrow \Delta(\bar{G})-\delta(\bar{G})=P-۱-\delta(G)-(P-۱-\Delta(G))=\Delta(G)-\delta(G)$$

حال طبق مفروضات سؤال داریم:

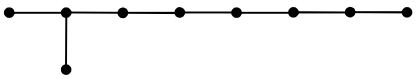
$$\Delta(\bar{G})-\delta(\bar{G})=۲ \Rightarrow \Delta(G)-\delta(G)=۲$$

$$\begin{cases} \Delta(G)-\delta(G)=۲ \xrightarrow{\times ۲} \begin{cases} ۲\Delta(G)-۲\delta(G)=۴ \\ \Delta(G)+۲\delta(G)=۱۷ \end{cases} \\ \end{cases} \Rightarrow ۳\Delta(G)=۲۱ \Rightarrow \Delta(G)=۷ \Rightarrow ۷-\delta(G)=۲ \Rightarrow \delta(G)=۵$$

چون $\Delta(G)=۷$ است، اگر حداقل تعداد رئوس برابر $P=۸$ باشد، به‌دلیل $\Delta(G)=۷$ در گراف $\bar{G}$ حتماً رأس منفرد خواهیم داشت و $\bar{G}$ ناهمنبد است، پس حداقل تعداد رئوس برابر $P=۹$ است و داریم:

$$\Delta(G)=۷ \Rightarrow \delta(\bar{G})=P-۱-\Delta(G)=۹-۱-۷=۱$$
$$\delta(G)=۵ \Rightarrow \Delta(\bar{G})=P-۱-\delta(G)=۹-۱-۵=۳$$

چون در گراف G می‌خواهیم بیشترین تعداد یال‌ها را داشته باشیم، پس در $\bar{G}$ باید کمترین تعداد یال‌ها را داشته باشیم. گراف $\bar{G}$ با $\delta(\bar{G})=۱$ و $\Delta(\bar{G})=۳$ و همبند زمانی دارای کمترین یال است که به‌صورت زیر باشد.



$$\Rightarrow q_{min}(\bar{G})=۸$$

بنابراین، بیشترین تعداد یال‌های گراف G برابر است با:

$$q_{max}(G)+q_{min}(\bar{G})=\binom{P}{۲} \Rightarrow q_{max}(G)+۸=\binom{۹}{۲} \Rightarrow q_{max}(G)+۸=\frac{۹\times۸}{۲}=۳۶ \Rightarrow q_{max}(G)=۳۶-۸=۲۸$$

فیزیک

۴۱- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۶)

بیشترین قدرت نفوذ مربوط به گاما و کمترین قدرت نفوذ مربوط به آلفا است.

۴۲- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۴)

با رسیدن دو تپ در شکل «الف» تداخل ویرانگر و در شکل «ب» تداخل سازنده رخ می‌دهد و بعد از همپوشانی همواره دو موج در جهت حرکت اولیهٔ خود به مسیر ادامه می‌دهند.

۴۳- پاسخ: گزینهٔ ۴ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۳)

انرژی مکانیکی سامانه طبق رابطهٔ $E=\frac{۱}{۲}kA^۲$ (چون دامنه ثابت است و به جرم هم بستگی ندارد) ثابت می‌ماند.

۴۴- پاسخ: گزینهٔ ۳ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۵)

موارد «الف» و «ت» درست است.

بررسی موارد نادرست:

ب) در دماهای معمولی بیشتر تابش گسیل‌شده در ناحیهٔ فروسرخ است.

پ) همهٔ اجسام در هر دمایی باشند از خود تابش الکترومغناطیسی گسیل می‌کنند.

۴۵- پاسخ: گزینهٔ ۱ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۱)

ابتدا به کمک قانون کولن نسبت $\frac{k}{r^۲}$ را محاسبه می‌کنیم:

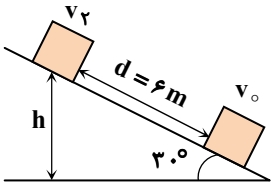
$$F=k\frac{q_۱q_۲}{r^۲} \Rightarrow ۶/۴\times۱۰^{-۲}=\frac{k\times۵\times۱۰^{-۶}\times۴\times۱۰^{-۶}}{r^۲} \Rightarrow \frac{k}{r^۲}=\frac{۶/۴\times۱۰^{-۲}}{۴\times۵\times۱۰^{-۱۲}} \quad \text{رابطهٔ (۱)}$$

حال از رابطهٔ $E=\frac{kq}{r_۲^۲}$ داریم:

$$E=\frac{kq}{r_۲^۲} \xrightarrow[(۱)]{r_۲=۲r} E=\frac{۶/۴\times۱۰^۲\times۵\times۱۰^{-۶}}{۴\times۵\times۱۰^{-۱۲}\times۴}=۰/۴\times۱۰^۴\ \frac{N}{C}$$

۴۶- پاسخ: گزینهٔ ۲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۳)

ابتدا h را محاسبه می‌کنیم:



$$\sin ۳۰^\circ=\frac{h}{d} \Rightarrow h=۳\,m$$

حال از پایستگی انرژی مکانیکی در طول مسیر داریم:

$$E_۲-E_۱=W_f \Rightarrow (U_۲+K_۲)-(U_۱+K_۱)=W_f \Rightarrow mgh-\frac{۱}{۲}mv_۱^۲=W_f$$
$$\Rightarrow m(۱۰)(۳)-\frac{۱}{۲}m(۱۰)^۲=W_f \Rightarrow W_f=-۲۰m\,J$$

سؤال از ما درصد انرژی تلف‌شده به تغییرات انرژی جنبشی اولیه را خواسته:

$$\frac{W_f}{K_۱}\times۱۰۰=\frac{-۲۰m}{۵۰m}\times۱۰۰=-٪۴۰$$

۴۷- پاسخ: گزینهٔ ۴ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۶)

فقط مورد «الف» نادرست است. جرم هسته از مجموع جرم نوکلئون‌های تشکیل‌دهندهٔ هسته اندکی کمتر است. بقیهٔ موارد عیناً جملات کتاب درسی است.

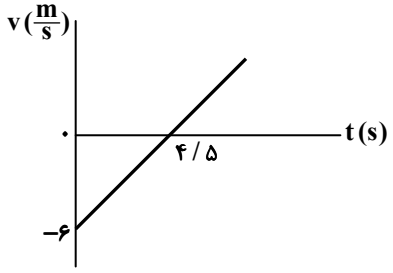
۴۸- پاسخ: گزینهٔ ۱ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

با مقایسهٔ معادلهٔ صورت سؤال با معادلهٔ مکان- زمان در حرکت با شتاب ثابت داریم:

$$\left.\begin{matrix} x=\frac{1}{2}at^2+v_\circ t+x_\circ \\ x=\frac{2}{3}t^2-6t+15 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}a=\frac{2}{3} \Rightarrow a=\frac{4}{3}\frac{m}{s^2} \\ v_\circ=-6\frac{m}{s}\ ,\ x_\circ=15\,m \end{cases}$$

معادلهٔ سرعت- زمان را نوشته و نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$v=at+v_\circ=\frac{4}{3}t-6$$

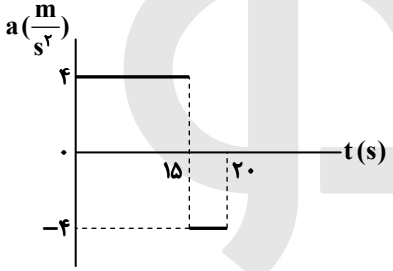


$$\frac{4}{3}t-6=0 \Rightarrow t=4/5\,s$$

همان‌طور که از نمودار مشخص است از لحظهٔ $t=4/5\,s$ به بعد متحرک در جهت محور x حرکت کرده و در حال دورشدن از مبدأ است. پس در لحظهٔ $t=4/5\,s$ متحرک کمترین فاصله را از مبدأ دارد. پس: $x=\frac{2}{3}(4/5)^2-6(4/5)+15=1/5\,m$

۴۹- پاسخ: گزینهٔ ۳ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

ابتدا نمودار شتاب- زمان را رسم می‌کنیم:



می‌دانیم سطح زیر نمودار شتاب- زمان برابر تغییرات سرعت است پس:

$$\Delta v=S=(15\times4)-(5\times4)=60-20=40\frac{m}{s}$$

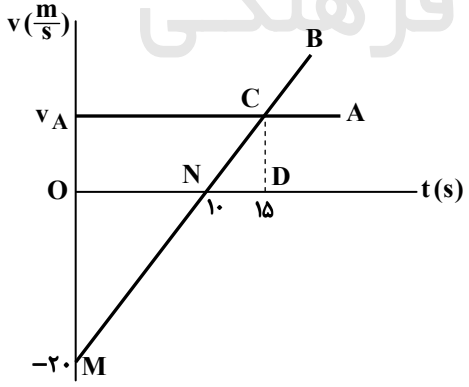
حال شتاب متوسط را به‌دست می‌آوریم:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{40}{20}=2\frac{m}{s^2}$$

۵۰- پاسخ: گزینهٔ ۴ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۱)

ابتدا به کمک مثلث NOM شتاب حرکت متحرک B را محاسبه می‌کنیم:

$$a_B=\frac{0-(-20)}{10}=2\frac{m}{s^2}$$



چون متحرک B با شتاب ثابت حرکت می‌کند پس در تمام مدت حرکت شتاب $2\frac{m}{s^2}$ دارد.

$$\text{بازهٔ }(10,15):\ a_B=\frac{v_A-0}{15-10} \Rightarrow v_A=10\frac{m}{s}$$

در لحظهٔ $t=5\,s$ دو متحرک در یک مکان قرار دارند، پس:

$$x_A=x_B \Rightarrow v_At+x_{\circ A}=\frac{1}{2}a_Bt^2+v_{\circ B}t+x_{\circ B}$$

$$\Rightarrow |x_{\circ A}-x_{\circ B}|=\left|\frac{1}{2}(2)(5)^2+(-20\times5)-(10\times5)\right|=|25-100-50|=125\,m$$

پس در لحظهٔ $t=0\,s$ فاصلهٔ دو متحرک از هم ۱۲۵ متر بوده است.

۵۱- پاسخ: گزینهٔ ۳ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

ابتدا زمان کل حرکت را محاسبه می‌کنیم:

$$y=\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 125=5t^2 \Rightarrow t=5s$$

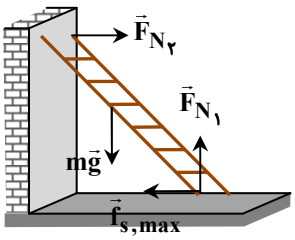
پس سؤال سرعت متوسط را در بازهٔ زمانی $t_1=3s$ تا $t_2=5s$ می‌خواهد.

$$v_1=10\times3+0=30\frac{m}{s}\ ,\ v_2=10\times5=50\frac{m}{s}$$

$$v_{av}=\frac{v_1+v_2}{2}=\frac{30+50}{2}=40\frac{m}{s}$$

۵۲- پاسخ: گزینهٔ ۲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

در راستای قائم و افقی حرکت نداریم. پس:



$$F_{net,y}=0 \Rightarrow F_{N_1}=mg=480N$$

$$F_{net,x}=0 \Rightarrow f_{s,max}=F_{N_2}$$

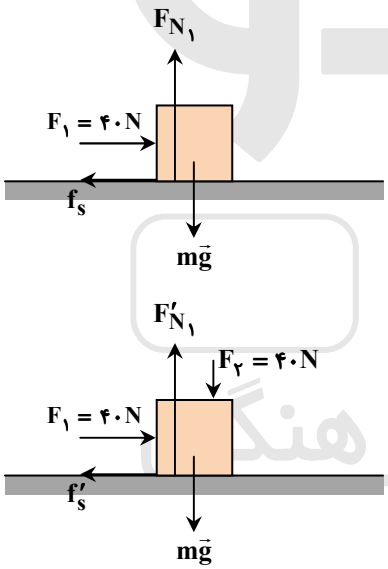
$$R=\sqrt{F_{N_1}^2+f_{s,max}^2}=\sqrt{F_{N_1}^2+(F_{N_1}\cdot\mu_s)^2}$$

$$\Rightarrow 120\sqrt{17}=F_{N_1}\sqrt{1+\mu_s^2}=480\sqrt{1+\mu_s^2}$$

$$\Rightarrow \frac{(120)^2\times17}{(480)^2}=1+\mu_s^2 \Rightarrow \frac{120\times120\times17}{480\times480}-1=\mu_s^2 \Rightarrow \mu_s^2=\frac{1}{16} \Rightarrow \mu_s=\frac{1}{4}=0/25$$

۵۳- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

در هر دو حالت جعبه ساکن است، یعنی:



$$F_{net,x}=0 \Rightarrow F_1=f_s \Rightarrow f_s=40N$$

$$F_{net,y}=0 \Rightarrow F_{N_1}=mg=80N$$

$$R_1=\sqrt{f_s^2+F_{N_1}^2} \Rightarrow R_1=\sqrt{40^2+80^2}=40\sqrt{5}\,N$$

$$F'_{net,x}=0 \Rightarrow F_1=f'_s=40N$$

$$F'_{net,y}=0 \Rightarrow F'_{N_1}=F_2+mg=40+80=120N$$

$$R_2=\sqrt{f_s'^2+F_{N_1}'^2}=\sqrt{(40)^2+(120)^2}=40\sqrt{10}\,N$$

بنابراین نیروی اصطکاک در هر دو حالت برابر $40N$ است و نسبت R_2 به R_1 برابر است با:

$$\frac{R_2}{R_1}=\frac{40\sqrt{10}}{40\sqrt{5}}=\sqrt{2}$$

۵۴- پاسخ: گزینهٔ ۱ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

به کمک نمودار، شیب خط که برابر با $\frac{\Delta p}{\Delta t}$ است را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\Delta p}{\Delta t}=\frac{-18}{5}=-3/6\frac{kg\cdot m}{s^2}$$

می‌دانیم $F_{net}=\frac{\Delta p}{\Delta t}$ است، پس:

$$F_{av}=\frac{\Delta p}{\Delta t}=ma \Rightarrow |-3/6|=0/45a \Rightarrow a=8\frac{m}{s^2}$$

۵۵- پاسخ: گزینهٔ ۳ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

$$T=\frac{2\pi r}{v} \xrightarrow[r\propto \frac{1}{v^2}]{v=\sqrt{\frac{GM}{r}}} T\propto \frac{1}{v^3} \Rightarrow \frac{T_A}{T_B}=(\frac{v_B}{v_A})^3=\frac{1}{8}$$

۵۶- پاسخ: گزینهٔ ۴ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۳)

ابتدا مکان نوسانگر را در $t=0/07\pi s$ به‌دست می‌آوریم:

$$x=0/04\underbrace{\cos 50(\frac{7}{100}\pi)}_{0}=0$$

در $x=0$ نوسانگر در نقطهٔ تعادل قرار دارد و دارای سرعت ماکزیمم است، پس:

$$v_{max}=A\omega=0/04\times 50=2\frac{m}{s}$$

۵۷- پاسخ: گزینهٔ ۳ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۳)

ابتدا سرعت نوسانگر را حساب می‌کنیم:

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}=\sqrt{\frac{Fl}{m}}=\sqrt{\frac{10\times 0/5}{0/2}}=5\frac{m}{s}$$

حال طبق رابطهٔ $\lambda=\frac{v}{f}$ داریم:

$$\lambda=\frac{v}{f}=\frac{5}{20}=0/25\,m=25\,cm$$

۵۸- پاسخ: گزینهٔ ۲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۴)

$$\lambda_{\text{موج صوتی}}=\frac{v_{\text{صوت}}}{f}=\frac{336}{600}=0/56\,m=56\,cm$$

$$f_n=\frac{nv}{2L} \Rightarrow 600=\frac{n\times 180}{2\times 0/6} \Rightarrow n=4$$ هماهنگ چهارم است.

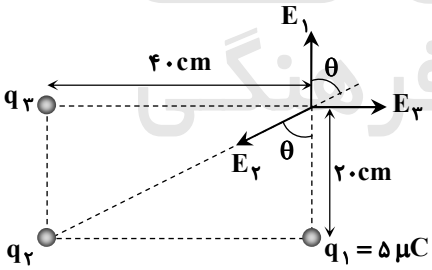
۵۹- پاسخ: گزینهٔ ۴ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۵)

$$W_0=\frac{hc}{\lambda_0} \Rightarrow 5/175=\frac{4/14\times 10^{-15}\times 3\times 10^8}{\lambda_0} \Rightarrow \lambda_0=2/4\times 10^{-7}\,m=240nm$$

$$\frac{1}{\lambda}=R(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}) \Rightarrow \lambda=\frac{400}{3}nm$$

۶۰- پاسخ: گزینهٔ ۲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۱)

چون میدان E_2 در راستای قطر مستطیل است، پس حتماً E_2 باید به سمت راست باشد چون E_1 به سمت بالا است.



$$\tan\theta=\frac{40}{20}=2 \Rightarrow \tan\theta=\frac{E_3}{E_1} \Rightarrow E_3=2E_1$$

حال روابط E_1 و E_3 را می‌نویسیم:

$$E_1=\frac{kq_1}{r_1^2}=\frac{k\times 5}{20^2},\ E_3=\frac{kq_3}{r_2^2}=\frac{kq_3}{40^2}$$

$$\Rightarrow \frac{kq_3}{40^2}=2(\frac{k\times 5}{20^2}) \Rightarrow q_3=40\mu C$$

۶۱- پاسخ: گزینهٔ ۱ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۱)

در حالت اول داریم:

$$F=\frac{kq_1(6q_1)}{r^2}=\frac{6kq_1^2}{r^2}$$

در حالت دوم که بارها با هم تماس پیدا می‌کنند:

$$\begin{cases}q_1'=q_1-3q_1=-2q_1\\ q_2'=-6q_1-(-3q)=-3q_1\end{cases}$$ چون هر دو بار منفی می‌شود، نیروی بین آن‌ها دافعه است. $\Rightarrow$

$$F'=\frac{k|q_1'||q_2'|}{r^2}=\frac{k(2q)(3q_1)}{r^2}=\frac{6kq_1^2}{r^2}$$

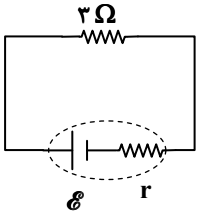
پس F و F' برابر هستند و نسبت آن‌ها برابر ۱ است.

۶۲- پاسخ: گزینهٔ ۳ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۲)

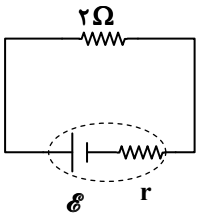
با بستن کلید مقاومت ۶Ω به مدار اضافه می‌شود. در حالت کلید باز و کلید بسته داریم:

$$I_۱=\frac{\mathscr{E}}{۳+r}\ \text{(کلید باز)}\ ,\ I_۲=\frac{\mathscr{E}}{۲+r}\ \text{(کلید بسته)}$$

اختلاف پتانسیل دو سر باتری در هر دو حالت با اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت معادل برابر است، پس:



$$\Rightarrow V_۱=I_۱R_{eq}=\frac{\mathscr{E}}{۳+r}(۳)=\frac{۳\mathscr{E}}{r+۳}$$



$$\Rightarrow V_۲=I_۲R_{eq}=\frac{\mathscr{E}}{۲+r}(۲)=\frac{۲\mathscr{E}}{r+۲}$$

طبق صورت سؤال با بستن کلید، اختلاف پتانسیل باتری ۲۰٪ کاهش می‌یابد. پس:

$$V_۲=۰/۸V_۱\Rightarrow\frac{۲\mathscr{E}}{r+۲}=۰/۸\frac{۳\mathscr{E}}{۳+r}\Rightarrow ۲/۴(r+۲)=۲(r+۳)\Rightarrow r=۳\Omega$$

۶۳- پاسخ: گزینهٔ ۲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۲)

طبق صورت سؤال $P_{۳\Omega}=P_{۱۲\Omega}$، پس:

$$\left.\begin{aligned}P_{۳\Omega}&=RI^۲=۳I^۲\\P_{۱۲\Omega}&=R'I_۲^۲=۱۲I_۲^۲\end{aligned}\right\}\Rightarrow ۱۲I_۲^۲=۳I^۲\Rightarrow I=۲I_۲\Rightarrow I_۲=\frac{I}{۲}$$

جریان از مقاومت ۱۲Ω برابر $\frac{I}{۲}$ است پس در شاخهٔ R هم جریان برابر $\frac{I}{۲}$ است، پس $R=۱۲\Omega$ می‌شود. حال مقاومت معادل را به‌دست می‌آوریم و به کمک رابطهٔ $I=\frac{\mathscr{E}}{R_{eq}+r}$ جریان را محاسبه می‌کنیم:

$$R_{eq}=۶+\frac{۱۲\times۱۲}{۱۲+۱۲}+۳=۶+۶+۳=۱۵\Omega$$

$$I=\frac{۱۲}{۱۵+۳}=\frac{۱۲}{۱۸}=\frac{۲}{۳}A$$

در نهایت برای محاسبهٔ اختلاف پتانسیل باتری داریم:

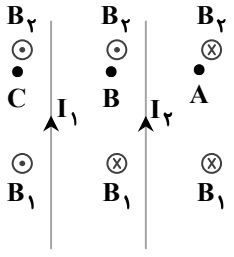
$$V=\mathscr{E}-Ir=۱۲-(\frac{۲}{۳}\times۳)=۱۰V$$

۶۴- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۲ (فصل ۲)

طبق متن کتاب درسی گزینهٔ ۴ درست است.

۶۵- پاسخ: گزینهٔ ۱ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۳)

طبق قاعدهٔ دست راست در سیم مستقیم حامل جریان، جهت میدان مغناطیسی اطراف سیم‌ها را مشخص می‌کنیم:



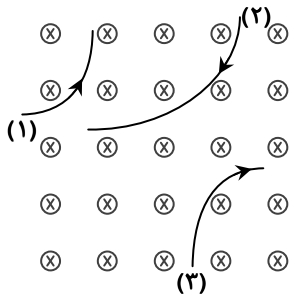
همان‌طور که در شکل می‌بینید چون نقطهٔ B به سیم ۲ نزدیک‌تر است، پس میدان مغناطیسی سیم ۲ قوی‌تر است پس:

$A\rightarrow\otimes$

$B\rightarrow\odot$

$C\rightarrow\odot$

۶۶- پاسخ: گزینهٔ ۴ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۳)



به کمک قانون دست راست، جهت حرکت هر ذره را بررسی می‌کنیم، اگر جهت حرکت مطابق قانون دست راست باشد، ذره مثبت و اگر جهت برعکس بود ذره منفی است.

همان‌طور که از شکل مشخص است ذرهٔ (۱) مثبت و ذره‌های (۲) و (۳) منفی هستند (درستی «ت» و رد عبارت‌های «الف» و «پ»)

اما درستی عبارت «ب»: با توجه به اینکه مسیر حرکت ذرهٔ (۲) بیشتر منحرف شده است، یعنی جرم بیشتری دارد.

۶۷- پاسخ: گزینهٔ ۴ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۲ (فصل ۴)

طبق متن صفحهٔ ۱۲۱ کتاب درسی گزینهٔ ۴ صحیح است.

۶۸- پاسخ: گزینهٔ ۳ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۴)

طبق قانون القای فاراده داریم:

$$\varepsilon_{av} = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -NA\cos\theta\frac{\Delta B}{\Delta t} \Rightarrow ۱/۲ = -۵۰۰\times A\times ۱\times(-۰/۶) \Rightarrow A = \frac{۱/۲}{۵۰۰\times ۰/۶} = \frac{۲}{۵۰۰}m^۲ = ۴۰cm^۲$$

۶۹- پاسخ: گزینهٔ ۲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۱)

از رابطهٔ $\rho = \frac{m}{V}$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l} r_A = ۰/۷۵r_B \\ m_A = \frac{۱}{۲}m_B \\ \rho = \frac{m}{V} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\rho_A}{\rho_B} = \frac{m_A}{m_B}\times\frac{V_B}{V_A} = \frac{m_A}{۲m_A}\times(\frac{r_B}{r_A})^۳ = \frac{۱}{۲}\times(\frac{۴}{۳})^۳ = \frac{۳۲}{۲۷} \Rightarrow \rho_A = \frac{۳۲}{۲۷}\rho_B$$

$$\text{درصد تغییرات} = \frac{\rho_A - \rho_B}{\rho_B}\times ۱۰۰ = \frac{\frac{۳۲}{۲۷}\rho_B - \rho_B}{\rho_B}\times ۱۰۰ = \frac{۵}{۲۷}\times ۱۰۰ \simeq ٪۱۸/۵$$

۷۰- پاسخ: گزینهٔ ۳ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۲)

با توجه به نمودار $P_۰ = ۱۰^۵ Pa$ می‌باشد.

فشار در عمق ۱۶۰ سانتی‌متری را داریم، پس:

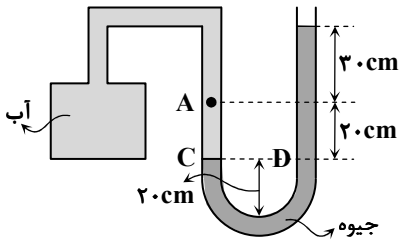
$$P = P_۰ + \rho gh \Rightarrow ۱/۲\times ۱۰^۵ = ۱۰^۵ + \rho(۱۰)(۱/۶) \Rightarrow \rho = ۱۲۵۰\frac{kg}{m^۳} = ۱/۲۵\frac{g}{cm^۳}$$

فشار پیمانه‌ای $P = P_۰$ است که برابر ρgh است:

$$P - P_۰ = P_g = ۱۲۵۰\times ۱۰\times ۱ = ۱۲۵۰۰Pa$$

۷۱- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۲)

دو نقطهٔ هم‌تراز D و C را در نظر می‌گیریم:



$$P_C = P_D \Rightarrow P_A + (\rho gh)_{آب} = (\rho gh)_{جیوه} + P_۰$$

$$\Rightarrow P_A + ۱۰^۳\times ۱۰\times ۰/۲ = ۱۳۶۰۰\times ۱۰\times ۰/۵ + P_۰$$

$$\Rightarrow P_A - P_۰ = ۱۳۶۰۰\times ۵ - ۲\times ۱۰^۳ = ۶۶\times ۱۰^۳ Pa = ۶۶kPa$$

۷۲- پاسخ: گزینهٔ ۴ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۳)

تک‌تک موارد را بررسی می‌کنیم:

الف) درست؛ انرژی پتانسیل گرانشی به مسیر حرکت بستگی ندارد.

ب و پ) همان‌طور که مشخص است ارتفاع B کاهش یافته و ارتفاع A افزایش یافته؛ پس طبق رابطهٔ $W = -mg\Delta h$ کار نیروی وزن B مثبت و کار نیروی وزن A منفی است. («ب» نادرست و «پ» درست)

ت) نادرست؛ کار نیروی وزن A و B وابسته به تغییر ارتفاع آن‌هاست و چون هر دو یک طبقه جابه‌جا شده‌اند پس $|W_A| = |W_B|$

۷۳- پاسخ: گزینهٔ ۱ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۴)

وقتی بنزین از ظرف سرریز می‌شود که افزایش حجم بیشتر از فضای خالی باشد، پس:

$V_{\text{قسمت خالی}} = Ah = A(۰/۲۵)\ ,\ \Delta V > V_{\text{قسمت خالی}}$

$\Delta V = V_۱\beta\Delta T \Rightarrow A(۰/۲۵) = ۵(A)(۱۰^{-۳})\Delta T \Rightarrow \Delta T = ۵۰K$

$\Delta T = T_۲ - T_۱ \Rightarrow ۵۰ = T_۲ - ۲۶۳ \Rightarrow T_۲ = ۳۱۳\,K$

$T_۲ = \theta_۲ + ۲۷۳ \Rightarrow \theta_۲ = ۴۰^\circ C$

$F = \frac{۹}{۵}\theta + ۳۲ = \frac{۹}{۵}(۴۰) + ۳۲ = ۱۰۴^\circ F$

۷۴- پاسخ: گزینهٔ ۳ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۵)

$\frac{P_i V_i}{T_i} = \frac{P_f V_f}{T_f} \Rightarrow \frac{P_۱ V_۱}{T_۱} = \frac{\frac{۱}{۴}P_۱(۵V_۱)}{T_۲} \Rightarrow T_۲ = \frac{۵}{۴}T_۱ \Rightarrow T_۲ > T_۱$

چون $\Delta T > ۰$ است، پس $\Delta U > ۰$ پس:

$\Delta U = Q + W > ۰$

۷۵- پاسخ: گزینهٔ ۲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۵)

در فرایند هم‌دما $\Delta U = ۰$ است، پس $Q = -W$ است. (گزینهٔ ۱ نادرست است.)

در فرایند انبساط بی‌دررو $Q = ۰$ است، پس $\Delta U = W$ است. (گزینهٔ ۲ درست است.)

در چرخهٔ کامل $\Delta U = ۰$ است، پس $Q = -W$ است. (گزینهٔ ۳ نادرست است.)

در فرایند هم‌فشار $\Delta U = Q + W$ است. (گزینهٔ ۴ نادرست است.)

شیمی

۷۶- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۱)

عنصر مد نظر ${}_{۳۱}Ga$ است: $[Ar]۳d^{۱۰}۴s^{۲}۴p^{۱}$

۱) نادرست؛ آرایش الکترونی $Ga^{۳+} \rightarrow ۳d^{۱۰}$ هم مشابه $Zn^{۲+}$ و هم Cu^{+} است.

۲) درست؛ در گروه ۱۳ شمار الکترون‌های عنصر قبلی و بعدی: ۱۳ و ۴۹ بوده که شمار الکترون‌های اتم A میانگین شمار الکترون‌های آن‌ها است.

۳) نادرست؛ اگر عنصر X از عناصر واسطه باشد $([Ar]۳d^{۱}۴s^{۲})$ با عنصر A $([Ar]۳d^{۱۰}۴s^{۲}۴p^{۱})$ تعداد الکترون ظرفیتی برابر دارد ولی به یقین هم‌گروه نیستند.

۴) نادرست؛ گالیم اشتراک نمی‌گذارد و فلز است.

۷۷- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۱) و شیمی ۲ (فصل ۱)

نکته: مستلزم تسلط نسبی بر جدول و عدد اتمی است.

۱) نادرست؛کلسیم

${}_{۲۰}Ca: [{}_{۱۸}Ar]\underline{۴s^{۲}} : ۲\times(۴+۰) = ۸$ ✗

۲) نادرست؛ Si و Ge هر دو شبه‌فلزهای گروه ۱۴ جدول تناوبی هستند که رسانایی الکتریکی کمی دارند.

${}_{۱۴}Si: [{}_{۱۰}Ne]\underline{۳s^{۲}۳p^{۲}} : ۲(۳+۰)+۲(۳+۱) = ۱۴$ ✗

${}_{۳۲}Ge: [{}_{۱۸}Ar]۳d^{۱۰}\underline{۴s^{۲}۴p^{۲}} : ۲(۴+۰)+۲(۴+۱) = ۱۸$ ✗

۳) درست؛ هالوژنی که تنها در دمای بالاتر از $۲۰۰^\circ C\,(۴۷۳\,K)$ واکنش می‌دهد برم است:

${}_{۳۵}Br: [Ar]۳d^{۱۰}\underline{۴s^{۲}۴p^{۵}} : ۲(۴+۰)+۵(۴+۱) = ۳۳$ ✓

۴) نادرست؛ در دورهٔ چهارم دو عنصر Cr و Cu از قاعدهٔ آفبا پیروی نمی‌کنند:

${}_{۲۴}Cr: [Ar]۳d^{۵}۴s^{۱} : ۵(۳+۲)+۱(۴+۰) = ۲۹$ ✗

${}_{۲۹}Cu: [Ar]۳d^{۱۰}۴s^{۱} : ۱۰(۳+۲)+۱(۴+۰) = ۵۴$ ✗

۷۸- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۱) و شیمی ۲ (فصل ۲)

۲۰ Ca	۲۱ Sc	۲۲ Ti	۲۳ V	۲۴ Cr	۲۵ Mn	۲۶ Fe	۲۷ Co	۲۸ Ni	۲۹ Cu	۳۰ Zn	۳۱ Ga	۳۲ Ge
$4s^2$	$3d^1 4s^2$	$3d^2 4s^2$	$3d^3 4s^2$	$3d^5 4s^1$	$3d^5 4s^2$	$3d^6 4s^2$	$3d^7 4s^2$	$3d^8 4s^2$	$3d^{10} 4s^1$	$3d^{10} 4s^2$	$3d^{10} 4s^2 4p^1$	$3d^{10} 4s^2 4p^2$
✓	✓	✓	✓	✗	✓	✓	✓	✓	✗	✓	✗	✓

الف) نادرست؛ ۱۰ عنصر در بیرونی‌ترین زیرلایه خود، دو الکترون دارند.

ب) درست؛ با افزایش عدد اتمی در دوره، خصلت نافلزی افزایش و خصلت فلزی کاهش می‌یابد. با افزایش عدد اتمی در گروه، خصلت نافلزی کاهش و خصلت فلزی افزایش می‌یابد.

پ) نادرست؛ عنصرهای هر گروه می‌توانند حالت فیزیکی متفاوت داشته باشند اما لزوماً خواص شیمیایی کاملاً یکسان ندارند.

ت) درست؛ Si (سیلیسیم) در دورهٔ سوم فقط الکترون به اشتراک می‌گذارد

۷۹- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۱ (فصل ۲)

برای توصیف یک نمونه گاز باید مقدار، دما و فشار آن گاز مشخص شده باشد. تنها در گزینهٔ ۱ همهٔ این مقادیر آمده است.

۸۰- پاسخ: گزینهٔ ۱ و ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۱)

«الف»، «ب» و «ت» با هم ساختار یکسان دارند.

اولین عضو خانواده آلکن‌ها: C_2H_4 اتن است.

الف) ۴- اتیل، ۳ و ۵- دی‌متیل هپتان: $C_{11}H_{24}$

ب) ۴- اتیل، ۳ و ۵ دی‌متیل هپتان: $C_{11}H_{24}$

پ) ۴- اتیل، ۲- متیل هگزان: C_9H_{20}

ت) ۵- اتیل، ۲ و ۴- دی‌متیل هپتان: $C_{11}H_{24}$

۸۱- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۲)

الف) درست؛ $O_2(-183)$ و $Ar(-186)$ نقطه جوش بالاتر از $-192^\circ C$ دارند و در این دما به حالت مایع هستند ولی $N_2(-196)$ به حالت گاز قرار دارد.

ب) نادرست؛ هلیم از گاز طبیعی آسان‌تر جدا می‌شود و در کشور ما تولید نمی‌شود اما آرگون در پتروشیمی شیراز با خلوص بسیار زیاد از طریق تقطیر جزءبه‌جزء هوای مایع تهیه می‌شود.

پ) درست؛ درصد هلیم در هوا ۰/۰۰۰۵ درصد است در حالی که حدود ۷ درصد حجمی گاز طبیعی را هلیم تشکیل می‌دهد.

ت) نادرست؛ نقطه جوش هلیم $-269^\circ C$ است و در دمای $-200^\circ C$ به حالت گاز است.

۸۲- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۱ (فصل ۲)

$$2H_2SO_4 + 1Fe \rightarrow 1FeSO_4 + 1SO_2 + 2H_2O$$

راه‌حل اوّل:

$$?\,g\,Fe : 200\,g\,\text{محلول} \times \frac{4/9\,g\,H_2SO_4}{100\,g\,\text{محلول}} \times \frac{1\,mol\,H_2SO_4}{98\,g\,H_2SO_4} \times \frac{1\,mol\,Fe}{2\,mol\,H_2SO_4} \times \frac{56\,g\,Fe}{1\,mol\,Fe} = 2/8\,g\,Fe$$

راه‌حل دوم:

$$\frac{200 \times 4/9 \times 10^{-2}}{2 \times 98} = \frac{m_{Fe}}{56 \times 1} \Rightarrow m_{Fe} = 2/8\,g$$

۸۳- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۱ (فصل ۳)

الف) نادرست؛ میلهٔ شیشه‌ای بار منفی پیدا می‌کند، پس مولکول آب از سر مثبت جذب می‌شود.

ب) نادرست؛ HCl قطبی است و نقطه جوش آن از F_2 بالاتر است، پس آسان‌تر مایع می‌شود.

پ) درست؛ زیرا CO_2 بر اثر انحلال با آب واکنش می‌دهد.

ت) درست؛ گشتاور دوقطبی آب 1/85 D و هیدروژن سولفید 0/97 D است.

۸۴- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۱ (فصل ۳)

$$8/64\,g\,SO_4^{2-} \times \frac{1\,mol\,SO_4^{2-}}{96\,g\,SO_4^{2-}} \times \frac{1\,mol\,Fe_2(SO_4)_3}{3\,mol\,SO_4^{2-}} = 0/03\,mol\,Fe_2(SO_4)_3 \Rightarrow FeBr_3 = 2 \times 0/03 = 0/06\,mol\,FeBr_3$$

$$\left.\begin{array}{l} 0/03\,mol\,Fe_2(SO_4)_3 \times \frac{2\,mol\,Fe^{3+}}{1\,mol\,Fe_2(SO_4)_3} \times \frac{56\,g\,Fe^{3+}}{1\,mol\,Fe^{3+}} = 3/36\,g\,Fe^{3+} \\ 0/06\,mol\,FeBr_3 \times \frac{1\,mol\,Fe^{3+}}{1\,mol\,FeBr_3} \times \frac{56\,g\,Fe^{3+}}{1\,mol\,Fe^{3+}} = 3/36\,g\,Fe^{3+} \end{array}\right\} \Rightarrow 6/72\,g\,Fe^{3+}$$

$$ppm = \frac{\text{جرم مادهٔ حل‌شونده}}{\text{جرم محلول}} \times 10^6 = \frac{6/72}{400} \times 10^6 = 16800$$

۸۵- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳)

اگر محلول سیرنشده‌ای از $K_2Cr_2O_7$ داشته باشیم، به این معناست که در دمای $m^\circ C$، زیر منحنی انحلال‌پذیری این ماده قرار داریم.

۱) نادرست؛ مثلاً در دمای $25^\circ C$، اگر نقطه مربوط به $K_2Cr_2O_7$ را $10g$ در نظر بگیریم (سیرنشده) می‌توان برای $CaCl_2$ نقطـه $90g$ را در نظر گرفت (سیرشده).

۲) نادرست؛ در هر دمایی در محدودهٔ $0^\circ C$ تا $35^\circ C$ می‌توان محلولی از $NaNO_3$ در نظر گرفت.

۳) نادرست؛ عبارت برای محدودهٔ دمای $m > 73^\circ C$ درست است.

۴) درست؛ از آنجا که منحنی سرب (II) نیترات بالاتر از پتاسیم دی کرومات قرار دارد، هر محلول سیرنشده از $K_2Cr_2O_7$ پایین‌تر از منحنـی $Pb(NO_3)_2$ قرار می‌گیرد.

۸۶- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۱)

$$\underset{x}{C_2H_4} + \underset{x}{H_2} \rightarrow C_2H_6$$

$$\underset{x}{C_2H_2} + \underset{2x}{2H_2} \rightarrow C_2H_6$$

$$3x\,mol\,H_2 \times \frac{2g\,H_2}{1mol\,H_2} = 0/6g\,H_2 \Rightarrow x = 0/1mol\,C_2H_4 \times \frac{28g\,C_2H_4}{1mol\,C_2H_4} = 2/8g\,C_2H_4$$

۸۷- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۱)

عنصر A یا در گروه ۱۵ ($_{33}As$ یا $_{51}Sb$) آرسنیک و آنتیموان است و یا در گروه ۱۶ ($_{52}Te$ یا $_{84}PO$) تلوریم و پلونیوم است.

الف) درست؛ مثلاً As

ب) نادرست؛ اگر با S هم‌گروه باشد، عدد اتمی آن ۵۲ است.

پ) نادرست؛ نخستین نافلز جامد جدول کربن است و با هیچ‌کدام هم‌گروه نیست.

ت) درست؛ هالوژن جامد جدول $_{53}I$ است، دومین فلز گروه ۱۴، $_{80}Pb$ است.

۸۸- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۱)

ابتدا معادله را موازنه می‌کنیم:

$$2CaSO_4 \xrightarrow{\Delta} 2CaO + 2SO_2 + O_2$$

راه‌حل اول:

$$\frac{\text{خالص } m(g)}{2\times 136} = \frac{13/44}{22/4\times 3} \Rightarrow m = 54/4g$$

راه‌حل دوم:

$$?\,g\,CaSo_4 \text{ خالص}: 13/44LG \times \frac{1molG}{22/4LG} \times \frac{2mol\,CaSo_4}{3molG} \times \frac{136g\,CaSo_4}{1mol\,CaSo_4} = \text{خالص } 54/5g\,CaSo_4$$

$$\text{جرم کل مادهٔ ناخالص} = 54/4 + 13/6 = 68 \Rightarrow P = \frac{\text{جرم مادهٔ خالص}}{\text{جرم مادهٔ ناخالص}} \times 100 = \frac{54/4}{68} \times 100 = \%80$$

۸۹- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۲ (فصل ۲)

فرایند میعان، گرماده است در حالی که فرایندهای فرازش، ذوب و تبخیر گرماگیر هستند.

۹۰- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۲ (فصل ۲)

$$(\overset{435}{\cancel{\Delta H_{H-H}}} + \Delta H_{Cl-Cl}) - (2\Delta H_{H-Cl}) = -186\,kJ$$

$$(\overset{435}{\cancel{\Delta H_{H-H}}} + \Delta H_{F-F}) - (2\Delta H_{H-F}) = -544\,kJ$$

$$\frac{a : \Delta H_{Cl-Cl}}{b : \Delta H_{F-F}} = 1/5 \Rightarrow a = \frac{3}{2}b$$

$$\underbrace{\Delta H_{H-Cl}}_{c} + \underbrace{\Delta H_{H-F}}_{d} = 1000\,kJ \Rightarrow d = 1000 - C$$

$$\left.\begin{array}{l} 435 + a - 2c = -186 \Rightarrow \frac{3}{2}b - 2c = -621 \\ 435 + b - 2d = -544 \Rightarrow b - 2(1000 - c) = -979 \end{array}\right\} \Rightarrow b = 160$$

۹۱- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۲ (فصل ۲)

۱) از آنجا که سرعت متوسط تغییر مول‌های ماده A، ۳ برابر سرعت متوسط تغییر مول‌های مادهٔ D است، ضریب نیز به همین نسبت است.

۲) نادرست؛ کاتالیزگر به یک نسبت سرعت را افزایش می‌دهد.

۳) نادرست؛ به شرطی این عبارت درست است که ضریب D، ۱ و ضریب A، ۳ باشد.

۴) نادرست؛ از سرعت متوسط تغییرات مول نمی‌توان نتیجه گرفت که هر دو واکنش‌دهنده یا فرآورده هستند.

۹۲- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۲)

الکل‌ها: $C-C-C-C-OH$ ، $C-C-\underset{\underset{OH}{|}}{C}-C$ ، $C-\underset{\underset{C}{|}}{C}-C-OH$ ، $C-\underset{\underset{OH}{|}}{\overset{\overset{C}{|}}{C}}-C$

اترها: $C-O-C-C-C$ ، $C-C-O-C-C$ ، $C-\underset{\underset{C}{|}}{C}-O-C$

۹۳- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۲ (فصل ۲) و شیمی ۳ (فصل ۲)

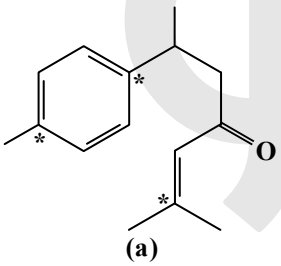
a) $C_{15}H_{20}O$ b) $C_6H_8O_6$

الف) درست

$$\frac{\text{a مجموع جرم اتم‌های کربن مولکول}}{\text{a مجموع جرم سایر اتم‌های مولکول}} = \frac{15\times12}{20+16} = 5$$

ب) درست؛ در مولکول a، ۴ گروه CH_3 وجود دارد و در مولکول b هم ۴ گروه OH وجود دارد.

پ) نادرست؛ در مولکول a، ۳ اتم کربن عدد اکسایش صفر دارند (*دارها) در حالی که در مولکول b، کربن با عدد اکسایش صفر وجود ندارد.



(a)

ت) نادرست

اختلاف دو فرمول $= C_9H_{12}O_5$ $\Rightarrow$ اختلاف شمار الکترون‌های ظرفیت $= (36+12)-(30) = 18$

۹۴- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۳)

- استیرن C_8H_8 (۱۶) – بوتانول $C_4H_{10}O$ (۱۵)
- سیانواتن C_3H_3N (۷) – وینیل‌کلرید C_2H_3Cl (۶)
- جوهر مورچه CH_2O_2 (۵) – تترافلوئورواتن C_2F_4 (۶)
- استون C_3H_6O (۱۰) – پروپن C_3H_6 (۹)

۹۵- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۱)

۱) نادرست؛ واکنش لوله‌بازکن گرماده است.

۲) نادرست؛ هرچه خاصیت آب‌گریزی پارچه بیشتر باشد، ناقطبی‌تر است و چسبندگی لکهٔ چربی به آن بیشتر است. در نتیجه پاک کردن آن به‌وسیلهٔ صابون دشوارتر است.

۳) نادرست؛ سر آب‌گریز صابون هم جزو بخش آنیونی صابون است.

۴) درست؛ صابون از حذف یک H از اسید چرب و اضافه شدن Na^+ یا K^+ یا NH_4^+ پدید می‌آید، در نتیجه جرم مولی آن افزایش می‌یابد.

مؤسسه آموزشی فرهنگی

۹۶- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۳)

۱) نادرست؛ TiO_2 و Fe_2O_3 به‌عنوان رنگ‌دانه استفاده می‌شوند.

۲) درست

۳) درست

۴) درست

۹۷- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

۱) $DOH : M_{DOH} \times \frac{۰/۱۲}{۱۰۰} = [OH^-]$

۲) $AOH : M_{AOH} \times \frac{۰/۳}{۱۰۰} = [OH^-]$

$$pH_{DOH} + ۱ = pH_{AOH} \Rightarrow \frac{[OH^-]_{AOH}}{[OH^-]_{DOH}} = ۱۰$$

$$\Rightarrow \frac{M_{AOH} \times ۰/۳}{M_{DOH} \times ۰/۱۲} = ۱۰ \Rightarrow \frac{M_{AOH}}{M_{DOH}} = ۴$$

۹۸- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

ابتدا پتانسیل‌های کاهشی را مرتب می‌کنیم:

$$E°(Ag^+ / Ag) = +۰/۸V \qquad E°(Zn^{۲+} / Zn) = -۰/۷۶V \qquad E°(V^{۲+} / V) = -۱/۲V$$

۱) نادرست؛ اگر X الکترود Ag باشد، Ag نقش کاتد دارد و معادلهٔ کلی سلول به‌صورت زیر است:

$$Zn(s) + ۲Ag^+(aq) \rightarrow Zn^{۲+}(aq) + ۲Ag(s) \sim ۲e^-$$

$$۰/۰۲mol\,e^- \times \frac{۱mol\,Zn}{۲mol\,e^-} \times \frac{۶۵g\,Zn}{۱mol\,Zn} = ۰/۶۵g$$ کاهش جرم تیغه روی

۲) نادرست؛ اگر X الکترود V باشد، وانادیم نقش آند دارد و جهت حرکت الکترون‌ها از راست به چپ (از آند به کاتد) است در حالی که جهت حرکت آنیون‌های محلول مقابل (محلول روی) به‌سمت آند (چپ به راست) است و آنیون‌های محلول وانادیم جابه‌جا نمی‌شوند (کاتیون‌های محلول وانادیم جذب کاتد می‌شوند).

۳) نادرست؛ اگر X الکترود Ag باشد، نقره کاتد است و کاتیون‌های روی را جذب می‌کند در حالی که کاتیون‌های محلول کاتد جابه‌جا نمی‌شوند.

۴) درست؛ اگر X الکترود V باشد، آند است. معادلهٔ کلی سلول به‌صورت $V + Zn^{۲+} \rightarrow V^{۲+} + Zn$ است. $Zn^{۲+}$ کاهش یافته، پس اکسنده است و $E°$ سلول برابر است با:

$$E°_{سلول} = emf = E°_{کاتد} - E°_{آند} = -۰/۷۶ - (-۱/۲) = +۰/۴۴V$$

۹۹- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۲)

۱) نادرست؛ کاتد، الکترود نقره است نه محلول نقره.

۲) درست

۳) درست

۴) درست؛ تولید قوطی‌های آلومینیمی از قوطی‌های کهنه فقط به ۷ درصد از انرژی لازم برای تهیهٔ همان تعداد قوطی از فرایند هال نیاز دارد.

۱۰۰- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

ابتدا پتانسیل‌های کاهش را مرتب می‌کنیم:

$$E°(Fe^{۳+} / Fe) = -۰/۰۴V$$

$$E°(V^{۳+} / V^{۲+}) = -۰/۲۶V$$

$$E°(Mn^{۲+} / Mn) = -۱/۱۸V$$

$$E°(V^{۲+} / V) = -۱/۲V$$

واکنشی در جهت طبیعی انجام نمی‌شود که از اتصال دو واکنش‌دهنده خط با شیب مثبت شکل گیرد؛ در این صورت emf سلول منفی می‌شود.

۱۰۱- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)

$$\text{اسید mol} : \text{HCl} = ۰/۲۵\,\text{L} \times \frac{۰/۲\,\text{mol}}{۱\,\text{L}} = ۰/۰۵\,\text{mol اسید}$$

$$\text{باز (۱) mol} : \text{KOH} = ۰/۱\,\text{L} \times \frac{۰/۱\,\text{mol}}{۱\,\text{L}} = ۰/۰۱\,\text{mol KOH}$$

$$\text{باز (۲) mol} : \text{NaOH} = \frac{۴\,\text{g NaOH} \times \frac{۱\,\text{mol NaOH}}{۴۰\,\text{g NaOH}}}{۱\,\text{L}} \times ۰/۱۵\,\text{L} = ۰/۰۱۵\,\text{mol NaOH}$$

$$\text{مول } H^+ = (\text{مول اسید}) - (\text{مول بازها}) = ۰/۰۵ - (۰/۰۱ + ۰/۰۱۵) = ۰/۰۲۵\,\text{mol}$$

$$\text{pH} = ۱/۷ \Rightarrow \left[H^+\right] = ۱۰^{-\text{pH}} = ۱۰^{-۱/۷} = ۱۰^{-۲} \times ۱۰^{۰/۳} = ۲ \times ۱۰^{-۲}\ \frac{\text{mol}}{\text{L}}$$

$$۲ \times ۱۰^{-۲}\ \frac{\text{mol}}{\text{L}} \times V_{\text{نهایی}}(\text{L}) = ۰/۰۲۵\,\text{mol} \Rightarrow V_{\text{نهایی}} = ۱/۲۵\,\text{L}$$

$$\text{حجم نهایی} = (\text{مجموع حجم اسید و بازها}) - \text{حجم آب} = ۱۲۵۰\,\text{mL} - (\underbrace{۲۵۰\,\text{mL}}_{\text{اسید}} + \underbrace{\overbrace{۱۰۰\,\text{mL}}^{۵۰۰\,\text{mL}}}_{\text{KOH}} + \underbrace{۱۵۰\,\text{mL}}_{\text{NaOH}}) = ۷۵۰\,\text{mL}$$

۱۰۲- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۳)

(آ) می‌تواند SO_2 باشد.

(ب) می‌تواند CO_2 باشد.

الف) درست؛ برای مثال اگر مولکول‌های (آ) و (ب)، SO_2 و CO_2 باشند، اتم مرکزی $+\delta$ است.

ب) نادرست؛ Li_2O یونی است.

پ) نادرست؛ اگر CO_2 را به SCO تبدیل کنیم اتم مرکزی باز هم $+\delta$ خواهد شد.

ت) درست؛ اگر به ساختار SO_2 به SO_3 تبدیل شود، مولکول ناقطبی خواهد شد.

۱۰۳- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۴)

$$\text{درصد کاهش CO} = \frac{۵/۹۹ - ۰/۶۱}{۵/۹۹} \times ۱۰۰ \simeq ٪۸۹/۸$$

$$\text{کاهش مولی CO} : \frac{۵/۹۹ - ۰/۶۱}{۲۸} \simeq ۰/۱۹$$

$$\text{کاهش مولی } C_8H_{18} : \frac{۱/۶۷ - ۰/۰۷}{۱۱۴} \simeq ۰/۰۱۴$$

۱۰۴- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۲ (فصل ۳) و شیمی ۳ (فصل ۴)

۱) درست

۲) درست؛ حلال چسب (اتیل استات) از واکنش اتانول با اتانوئیک اسید تولید می‌شود.

۳) نادرست؛ اتن یکی از مهم‌ترین خوراک در صنایع پتروشیمی است نه پلی‌اتن

۴) درست

۱۰۵- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۴)

۱) نادرست؛ افزایش دما در واکنش (I) که گرماگیر است باعث پیشرفت واکنش در جهت رفت و افزایش غلظت فراورده‌ها می‌شود.

۲) درست؛ کاهش حجم ظرف غلظت همهٔ گازها را (مستقل از جهت پیشرفت واکنش) افزایش می‌دهد. کاهش دما در واکنش (II) که گرماده است باعث پیشرفت واکنش در جهت رفت می‌شود.

۳) نادرست؛ تغییر غلظت سبب تغییر K نمی‌شود. (K برای یک واکنش تعادلی در دمای معین،مقداری ثابت است.)

۴) نادرست؛ تغییر فشار (تغییر حجم) در واکنش (I) سبب جابه‌جایی تعادل نمی‌شود؛ زیرا شمار مول گازی در طرفین واکنش برابر است.