گزینه دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی

پاسخ تشریحی

آزمون سراسری سال ۱۴۰۳

(اردیبهشت ماه ۱۴۰۳)

گروه آزمایشی علوم ریاضی

(داخل کشور)

ریاضیات

۱- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۱ (فصل ۱، درس ۴)

a، $2a+1$ و $a-5$، سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی‌اند، پس:

$$\text{وسطی} = \frac{\text{سومی}+\text{اولی}}{2} \Rightarrow 1+2a = \frac{a+(5-a)}{2} \Rightarrow 2+4a = 5 \Rightarrow 4a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

با جای‌گذاری $a = \frac{3}{4}$، دو جملهٔ ابتدایی دنباله را حساب می‌کنیم: $a_2 = 1+2a = 1+2(\frac{3}{4}) = \frac{5}{2}$ $\quad a_1 = a = \frac{3}{4}$

قدرنسبت برابر است با: $d = a_2 - a_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$

با داشتن $a_1 = \frac{3}{4}$ و $d = \frac{7}{4}$، جملهٔ نهم را به‌دست می‌آوریم: $a_9 = a_1 + 8d = \frac{3}{4} + 8(\frac{7}{4}) = \frac{3}{4} + 14 = 0/75 + 14 = 14/75$

۲- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * آمار و احتمال (درس ۱، فصل ۱)

نکته: $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q \;,\; p \vee F \equiv p \;,\; p \vee p \equiv p$

با استفاده از نکات فوق و با توجه به اینکه p، درست و q، نادرست است، داریم:

$$(p \Rightarrow r) \Rightarrow (r \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee r) \Rightarrow (\sim r \vee q) \equiv (\sim T \vee r) \Rightarrow (\sim r \vee F) \equiv (F \vee r) \Rightarrow (\sim r)$$
$$\equiv r \Rightarrow (\sim r) \equiv \sim r \vee \sim r \equiv \sim r$$

۳- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۱ (فصل ۱، درس ۲)

با توجه به اینکه عرض دو نقطهٔ $A(3,-4)$ و $B(-1/5,-4)$ یکسان است، پس میانگین طولشان، همان طول رأس را به ما می‌دهد:

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3+(-1/5)}{2} = \frac{1/5}{2} = \frac{3}{4}$$

مجموع صفرهای سهمی از رابطهٔ $S = -\frac{b}{a}$ و طول رأس از رابطهٔ $x_S = -\frac{b}{2a}$ به‌دست می‌آیند، پس کافیست x_S به‌دست آمده را در ۲ ضرب کنیم تا به S برسیم:

$$S = 2x_S = 2\times\frac{3}{4} = \frac{3}{2}$$

۴- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۲، درس ۲)

اختلاف ریشه‌های معادلهٔ $\underbrace{1}_{a}x^2 + \underbrace{2k}_{b}x + \underbrace{5}_{c} = 0$ را حساب می‌کنیم:

$$M = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{(2k)^2 - 4(1)(5)}}{|1|} = \sqrt{4k^2 - 20} = \sqrt{4(k^2-5)} = 2\sqrt{k^2-5}$$

عبارت به‌دست آمده را با $\frac{4}{3}k$ برابر قرار می‌دهیم:

$$2\sqrt{k^2-5} = \frac{4}{3}k \xrightarrow{\text{توان ۲}} k^2 - 5 = \frac{4}{9}k^2 \Rightarrow k^2 - \frac{4}{9}k^2 = 5 \Rightarrow \frac{5}{9}k^2 = 5 \Rightarrow k^2 = 9$$

پس:

$$\left[\frac{k^2}{2}\right] = \left[\frac{9}{2}\right] = [4/5] = 4$$

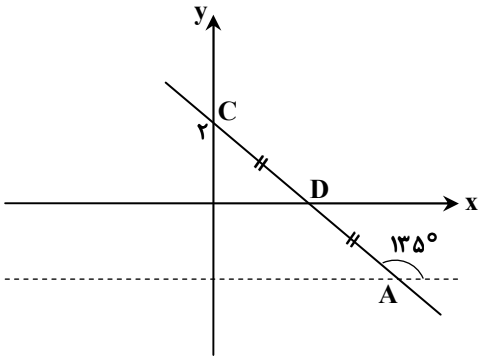
۵- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۱ (فصل ۲، درس ۲)

راه‌حل اول:

زاویه‌ای که خط موردنظر با جهت مثبت محور طول‌ها می‌سازد، برابر 135° است. بنابراین شیب خط برابر است با: $m = \tan 135^\circ = -1$

عرض از مبدأ این خط نیز برابر ۲ است. پس معادلهٔ خط به‌صورت $y = -x + 2$ است. بنابراین مختصات نقطهٔ D محل تلاقی خط با محور طول‌ها به‌صورت $D(2,0)$ است. پس با توجه به این‌که $AD = DC$، پس طول نقطهٔ A برابر ۴ است. پس مختصات A به‌صورت $A(4,-2)$ است و OA برابر است با:

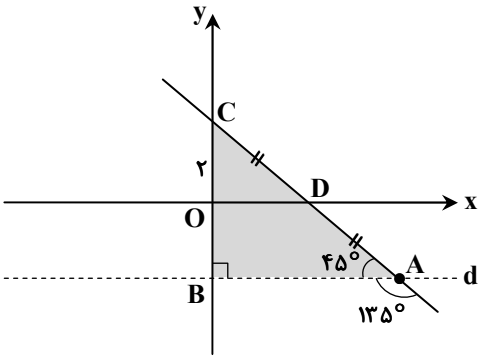
$$OA = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$



راه‌حل دوم:

با توجه به موازی‌بودن محور xها و خط d، در مثلث ABC تالس می‌نویسیم:

$$\frac{OC}{OB}=\frac{AD}{DA} \Rightarrow \frac{۲}{OB}=۱ \Rightarrow OB=۲$$

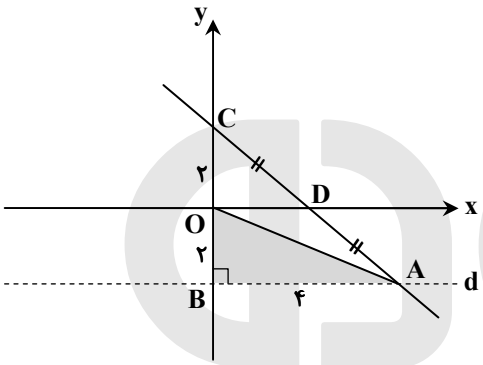


از طرفی مثلث ABC، قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است (چون زاویهٔ حاده‌اش ۴۵° است)، پس BC با AB برابر است؛ در نتیجه:

$$AB=BC=۲+۲=۴$$

برای به‌دست آوردن فاصلهٔ O تا A، کافیست در مثلث OAB، فیثاغورس بنویسیم:

$$OA^۲=۲^۲+۴^۲=۲۰ \Rightarrow OA=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$$



۶- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۲، درس ۲)

اول $f(\sqrt{۵})$ را حساب می‌کنیم:

$$f(x)=x^۲-[x] \Rightarrow f(\sqrt{۵})=(\sqrt{۵})^۲-[\sqrt{۵}]=۵-۲=۳$$

پس تساوی $f(a\underbrace{f(\sqrt{۵})}_{۳})=۲$ به‌شکل مقابل می‌شود:

$$f(۳a)=۲ \Rightarrow (۳a)^۲-[۳a]=۲$$

گزینه‌ها را در $(۳a)^۲-[۳a]$ جای‌گذاری می‌کنیم؛ هر کدام حاصلش ۲ شد، جواب است:

(۱) جای a، $\frac{۱}{۳}$ قرار می‌دهیم:

$$(۳(\frac{۱}{۳}))^۲-[۳(\frac{۱}{۳})]=(۱)^۲-[۱]=۱-۱=۰ \quad ✗$$

(۲) جای a، $-\frac{۱}{۳}$ قرار می‌دهیم:

$$(۳(-\frac{۱}{۳}))^۲-[۳(-\frac{۱}{۳})]=(-۱)^۲-[-۱]=۱-(-۱)=۲ \quad ✓$$

(۳) جای a، $\frac{۱}{۵}$ قرار می‌دهیم:

$$(۳(\frac{۱}{۵}))^۲-[۳(\frac{۱}{۵})]=\frac{۹}{۲۵}-۰=\frac{۹}{۲۵}$$

(۴) جای a، $-\frac{۱}{۵}$ قرار می‌دهیم:

$$(۳(-\frac{۱}{۵}))^۲-[۳(-\frac{۱}{۵})]=\frac{۹}{۲۵}-(-۱)=\frac{۳۴}{۲۵}$$

موسسه آموزشی فرهنگی

۷- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (فصل ۱، درس ۳)

با توجه به معادلهٔ $\sqrt{x}+\sqrt{x-a}=a$، به دو شرط دامنه باید حواسمان باشد:

$$\begin{cases} a \geq 0 \\ x-a \geq 0 \Rightarrow x \geq a \end{cases}$$

$\sqrt{x}$ را به‌سمت دیگر تساوی می‌بریم:

$$\sqrt{x-a}=a-\sqrt{x}$$

طرفین تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$x-a=a^2+x-2a\sqrt{x} \Rightarrow 2a\sqrt{x}=a^2+a \Rightarrow \sqrt{x}=\frac{a^2+a}{2a}=\frac{a(a+1)}{2a}$$

قبل از اینکه a را از صورت و مخرج ساده کنیم، $a=0$ را در معادلهٔ اولیه بررسی می‌کنیم:

$$\sqrt{x}+\sqrt{x-a}=a \xrightarrow{a=0} \sqrt{x}+\sqrt{x}=0 \Rightarrow 2\sqrt{x}=0 \Rightarrow \sqrt{x}=0 \Rightarrow x=0$$

چون x عددی صحیح شد، پس $a=0$ قبول است.

حالا a را ساده می‌کنیم:

$$\sqrt{x}=\frac{a(a+1)}{2a} \Rightarrow \sqrt{x}=\frac{a+1}{2} \Rightarrow x=(\frac{a+1}{2})^2$$

برای آن‌که $(\frac{a+1}{2})^2$ عددی صحیح باشد، a از بین مقادیر طبیعی، فقط اعداد فرد را می‌تواند بگیرد، یعنی a از بین اعداد طبیعی یک‌رقمی می‌تواند ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ هم باشد.

بنابراین a، ۶ مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد: $\{0,1,3,5,7,9\}$

۸- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۱ (فصل ۲، درس ۳)

طول نقطه‌ای به‌عرض ۱، روی خط $10y-x=-10$ را پیدا می‌کنیم: $10(1)-x=-10 \Rightarrow x=20$

مختصات نقطه به‌صورت $A(20,1)$ شد.

قرار است وارون تابع $f(x)=x^3+6x^2+ax+1$ از نقطهٔ $(20,1)$ عبور کند، پس تابع f از نقطهٔ $(1,20)$ عبور می‌کند؛ در نتیجه:

$$f(1)=20 \Rightarrow 1+6+a+1=20 \Rightarrow a=12$$

۹- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۳، درس ۳)

به‌کمک خاصیت $\log_c A+\log_c B=\log_c AB$، سمت چپ معادله را ساده می‌کنیم:

$$\log_2(x^2+2x+4)+\log_2(x-2)=3 \Rightarrow \log_2((x^2+2x+4)(x-2))=3 \Rightarrow \log_2(x^3-8)=3$$

تساوی لگاریتمی بالا را به نمایی تبدیل می‌کنیم:

$$2^3=x^3-8 \Rightarrow x^3=16 \Rightarrow x=\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{2^4}=2^{\frac{4}{3}}$$

حاصل $\log_{\sqrt[3]{2}} x$ برابر است با:

$$\log_{2^{\frac{1}{3}}} 2^{\frac{4}{3}}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{1}{3}}\underbrace{\log_2 2}_{1}=4\times 1=4$$

۱۰- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (فصل ۳، درس ۳)

نقطهٔ $(0,2)$ روی تابع $y=c+\log_5(ax+b)$ قرار دارد، پس:

$$2=c+\log_5 b \Rightarrow -c=(\log_5 b)-2$$

نقطهٔ $(4/2,0)$ روی تابع قرار دارد، پس:

$$0=c+\log_5(2/4a+b) \Rightarrow -c=\log_5(2/4a+b) \Rightarrow$$

دو عبارتی که با $-c$ برابر شدند را با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$(\log_5 b)-2=\log_5(2/4a+b) \Rightarrow \log_5 b-\log_5(2/4a+b)=2$$

در سمت چپ از خاصیت $\log_c A-\log_c B=\log_c \frac{A}{B}$ استفاده می‌کنیم:

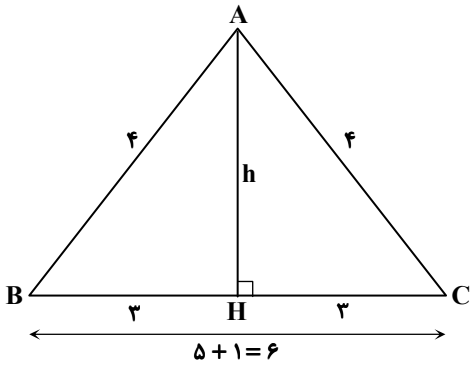
$$\log_5 \frac{b}{2/4a+b}=2 \xrightarrow{\text{تبدیل لگاریتمی به نمایی}} 5^2=\frac{b}{2/4a+b} \Rightarrow 25=\frac{b}{2/4a+b} \xrightarrow{\text{طرفین‌وسطین}} 60a+25b=b$$

$$\Rightarrow 60a=-24b \Rightarrow \frac{a}{b}=-\frac{24}{60} \Rightarrow \frac{a}{b}=-\frac{2}{5}$$

۱۱- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۴، درس ۲)

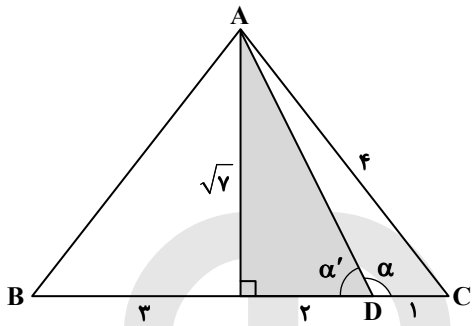
ارتفاع وارد بر قاعده را به‌کمک فیثاغورس در $\overset{\triangle}{ABH}$ حساب می‌کنیم:

$$۴^۲ = ۳^۲ + h^۲ \Rightarrow h = \sqrt{۷}$$



حالا در مثلث AHD، برای زاویهٔ α' (که مکمل α است)، تانژانت می‌نویسیم:

$$\tan\alpha' = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{\sqrt{۷}}{۲}$$



زاویهٔ α مکمل α' است. اگر دو زاویه مکمل باشند، تانژانت‌هایشان قرینهٔ هم است، پس:

$$\tan\alpha = -\tan\alpha' = -\frac{\sqrt{۷}}{۲}$$

۱۲- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۴، درس ۴)

بین عبارت‌های دوم و سوم از $\sqrt{۲}$ فاکتور می‌گیریم:

$$۳\cos ۴x + \sqrt{۲}(\sin x - \cos x)$$

از اتحاد $\sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{۲}\sin(\alpha - \frac{\pi}{۴})$ استفاده می‌کنیم:

$$۳\cos ۴x + \sqrt{۲}\underbrace{(\sin x - \cos x)}_{\sqrt{۲}\sin(x-\frac{\pi}{۴})} = ۳\cos ۴x + ۲\sin(x - \frac{\pi}{۴})$$

حالا جای xها، $\frac{\pi}{۱۲}$ قرار می‌دهیم:

$$۳\cos ۴(\frac{\pi}{۱۲}) + ۲\sin(\frac{\pi}{۱۲} - \frac{\pi}{۴}) = ۳\cos\frac{\pi}{۳} + ۲\sin(-\frac{\pi}{۶}) = ۳(\frac{۱}{۲}) + ۲(-\frac{۱}{۲}) = \frac{۳}{۲} - \frac{۲}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

۱۳- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۴، درس ۴)

راه‌حل اول:

در صورت و مخرج کسر اول به‌جای $\cos^۲\alpha$ می‌نویسیم $۱ - \sin^۲\alpha$ و در صورت و مخرج کسر دوم به‌جای $\sin^۲\alpha$ می‌نویسیم $۱ - \cos^۲\alpha$.

$$\frac{\sin^۴\alpha + ۴\overbrace{\cos^۲\alpha}^{۱-\sin^۲\alpha}}{۱ + \underbrace{\cos^۲\alpha}_{۱-\sin^۲\alpha}} - \frac{\cos^۴\alpha + ۴\overbrace{\sin^۲\alpha}^{۱-\cos^۲\alpha}}{۱ + \underbrace{\sin^۲\alpha}_{۱-\cos^۲\alpha}} = \frac{\sin^۴\alpha - ۴\sin^۲\alpha + ۴}{۲ - \sin^۲\alpha} - \frac{\cos^۴\alpha - ۴\cos^۲\alpha + ۴}{۲ - \cos^۲\alpha}$$

صورت هر دو کسر با اتحاد مربع، تجزیه می‌شود:

$$\frac{(۲-\sin^۲\alpha)^۲}{۲-\sin^۲\alpha} - \frac{(۲-\cos^۲\alpha)^۲}{۲-\cos^۲\alpha} = (۲-\sin^۲\alpha) - (۲-\cos^۲\alpha) = ۲ - \sin^۲\alpha - ۲ + \cos^۲\alpha = \cos^۲\alpha - \sin^۲\alpha = \cos ۲\alpha$$

راه‌حل دوم:

به‌جای α، $\frac{\pi}{۲}$ قرار می‌دهیم: $\frac{\sin^۴\alpha+۴\cos^۲\alpha}{۱+\cos^۲\alpha}-\frac{\cos^۴\alpha+۴\sin^۲\alpha}{۱+\sin^۲\alpha}=\frac{۱+۰}{۱+۰}-\frac{۰+۴}{۱+۱}=۱-۲=-۱$

با جای‌گذاری $\alpha=\frac{\pi}{۲}$، مقدار هر ۴ گزینه را حساب می‌کنیم:

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\underbrace{\cos ۲\alpha}_{\cos\pi=-۱}$ ۴) $\underbrace{\sin ۲\alpha}_{\sin\pi=۰}$

فقط مقدار گزینهٔ ۳، برابر -۱ شد.

۱۴- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۲، درس ۲)

به‌کمک اتحاد $\cos ۲\alpha=۱-۲\sin^۲\alpha$، داریم: $\underbrace{\cos ۲x}_{۱-۲\sin^۲x}+\sin^۲x=۰\Rightarrow ۱-\sin^۲x=۰\Rightarrow \sin^۲x=۱\Rightarrow \sin x=\pm ۱$

جاهایی که $\sin x$ برابر ۱ یا -۱ است، کسینوس حتماً صفر است، یعنی معادلهٔ $\sin x=\pm ۱$ معادل با معادلهٔ $\cos x=۰$ است. جواب این معادله هم به‌صورت $x=k\pi+\frac{\pi}{۲}$ است.

جای k، اعداد صحیح -۳ تا ۰ را می‌توانیم قرار دهیم: $k\pi+\frac{\pi}{۲}=\frac{۲k\pi+\pi}{۲}\xrightarrow{k=-۳,-۲,-۱,۰}-\frac{۵\pi}{۲},-\frac{۳\pi}{۲},-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}$

مجموع این ۴ جواب برابر است با: $-\frac{۵\pi}{۲}+\frac{-۳\pi}{۲}+\frac{-\pi}{۲}+\frac{\pi}{۲}=-۴\pi$

۱۵- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۱ (فصل ۵، درس ۴)

حد راست: ابتدا تکلیف براکت را مشخص می‌کنیم. اگر $x\to ۲^+$، حاصل $\left[x^۲\right]$ برابر است با: $\left[(۲^+)^۲\right]=\left[۴^+\right]=۴$

پس حدمان به‌شکل مقابل می‌شود:

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{x-۲}{x^۲-\left[x^۲\right]}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{x-۲}{x^۲-۴}$$

با یک حد صفرصفرم روبه‌رو هستیم که به‌راحتی رفع ابهام می‌شود:

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{x-۲}{(x-۲)(x+۲)}=\frac{۱}{۲+۲}=\frac{۱}{۴}$$

حد چپ: ابتدا تکلیف براکت را مشخص می‌کنیم. اگر $x\to ۲^-$، حاصل $\left[x^۲\right]$ برابر است با: $\left[(۲^-)^۲\right]=\left[۴^-\right]=۳$

پس حدمان به‌شکل مقابل می‌شود:

$$\lim_{x\to ۲^-}\frac{x-۲}{x^۲-\left[x^۲\right]}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{x-۲}{x^۲-۳}$$

این حد مبهم نیست و کافیست جای xها، ۲ قرار دهیم:

$$\text{حد چپ}=\frac{۲-۲}{۴-۳}=۰$$

پس:

$$\text{حد چپ}+\text{حد راست}=\frac{۱}{۴}+۰=\frac{۱}{۴}$$

۱۶- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۳، درس ۲)

تابع $f-g$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x)-g(x)=\frac{۴}{(x+۳)(x-۱)}-\frac{۱}{x-۱}=\frac{۴-(x+۳)}{(x+۳)(x-۱)}=\frac{۴-x-۳}{(x+۳)(x-۱)}=\frac{-(x-۱)}{(x+۳)(x-۱)}$$

برای به‌دست آوردن مجانب‌ها باید ضابطه را ساده کنیم، پس $(f-g)(x)=-\frac{۱}{x+۳}$

ریشهٔ مخرج، مجانب قائم است: $x=-۳$

حد این تابع در بی‌نهایت، مجانب افقی است:

$$\lim_{x\to\infty}-\frac{۱}{x+۳}=۰\Rightarrow y=۰$$

نقطهٔ تلاقی دو خط $x=-۳$ و $y=۰$، نقطهٔ $(-۳,۰)$ است.

۱۷- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (فصل ۵، درس ۵)

نقاطی که نیاز به بررسی دارند، نقاط با طول صحیح هستند.

$x=k$ را نمایندهٔ نقاط با طول صحیح می‌گیریم و حد راست و چپ تابع در این نقطه را حساب می‌کنیم. دقت کنید وقتی $x \to k^+$ یا $x \to k^-$، از ضابطه با دامنهٔ $x \notin \mathbb{Z}$، خروجی می‌گیریم:

حد راست: $(1-a)\underbrace{[k^+]}_{k} + (3a^2-1)\underbrace{[-(k^+)]}_{-k-1} = k-ak-3a^2k-3a^2+k+1$

حد چپ: $(1-a)\underbrace{[k^-]}_{k-1} + (3a^2-1)\underbrace{[-(k^-)]}_{-k} = k-1-ak+a-3a^2k+k$

حد راست و چپ را برابر قرار می‌دهیم:

$$k-ak-3a^2k-3a^2+k+1 = k-1-ak+a-3a^2k+k \Rightarrow -3a^2+1=-1+a \Rightarrow 3a^2+a-2=0 \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ a=\frac{2}{3} \end{cases}$$

به‌ازای $a=-1$ و $a=\frac{2}{3}$، مقدار حد (حد راست یا چپ) را حساب می‌کنیم:

$$\text{حد (حد راست)} = k-ak-3a^2k-3a^2+k+1 \begin{cases} \xrightarrow{a=-1} k+k-3k-3+k+1=-2 \\ \xrightarrow{a=\frac{2}{3}} k-\frac{2}{3}k-\frac{4}{3}k-\frac{4}{3}+k+1=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

اگر $a=-1$ باشد، برای پیوسته‌بودن باید مقدار تابع در نقاط صحیح که از $b\,Sin\frac{\pi}{a}$ به‌دست می‌آید، برابر با حد یعنی -2 باشد:

$$b\underbrace{Sin(-\pi)}_{0} = -2 \Rightarrow 0=-2 \quad \text{*}$$

اگر $a=\frac{2}{3}$ باشد، برای پیوسته‌بودن باید مقدار تابع در نقاط صحیح که از $b\,Sin\frac{\pi}{a}$ به‌دست می‌آید، برابر با حد یعنی $-\frac{1}{3}$ باشد:

$$b\underbrace{Sin(\frac{3\pi}{2})}_{-1} = -\frac{1}{3} \Rightarrow -b=-\frac{1}{3} \Rightarrow b=\frac{1}{3}$$

پس:

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 2$$

۱۸- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۴، درس ۲)

عبارت $f'(1)g(1)-g'(1)f(1)$ ما را یاد مشتق $\frac{f}{g}$ که $\frac{f'g-g'f}{g^2}$ می‌شود، می‌اندازد.

مشتق $\frac{f}{g}$ در $x=1$ به‌صورت مقابل است: $(\frac{f}{g})'(1) = \frac{f'(1)g(1)-g'(1)f(1)}{g^2(1)}$

اگر طرفین وسطین کنیم، داریم: $g^2(1)\times(\frac{f}{g})'(1) = \underbrace{f'(1)g(1)-g'(1)f(1)}_{\text{خواستهٔ سؤال}}$

پس کافیست $(\frac{f}{g})'(1)$ و $g^2(1)$ را حساب کنیم و در هم ضرب کنیم:

اول $\frac{f}{g}$ را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{f}{g} = \frac{\sqrt{x+8}-\sqrt{x}}{\frac{1}{\sqrt{x+8}+\sqrt{x}}} = (\sqrt{x+8})^2-(\sqrt{x})^2 = x+8-x = 8$$

مشتق عدد ۸، برابر با صفر است، پس $(\frac{f}{g})'(1)$ صفر می‌شود و حاصل‌ضربش در $g^2(1)$ نیز همان صفر است.

۱۹- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (فصل ۵، درس ۱)

دو شرط لازم داریم:

(۱) ریشهٔ مخرج (یعنی $x = ۱ - m$) در بازهٔ $(۱, +\infty)$ نباشد، پس باید $۱ - m$ کوچک‌تر یا مساوی ۱ باشد:

$$۱ - m \le ۱ \Rightarrow m \ge ۰$$

(۲) مشتق تابع، نامثبت باشد:

$$y = \frac{mx + ۲}{x + (-۱ + m)} \xrightarrow{\text{مشتق هموگرافیک}} y' = \frac{m(-۱ + m) - ۲(۱)}{(x - ۱ + m)^۲} = \frac{m^۲ - m - ۲}{\underbrace{(x - ۱ + m)^۲}_{\text{نامنفی}}} \le ۰ \Rightarrow m^۲ - m - ۲ \le ۰$$

$$\Rightarrow (m - ۲)(m + ۱) \le ۰ \xrightarrow{\text{بین ریشه‌ها}} -۱ \le m \le ۲$$

با اشتراک بین دو شرط $m \ge ۰$ و $-۱ \le m \le ۲$، داریم: $۰ \le m \le ۲$ و با توجه به $m \ne ۲$ داریم $۰ \le m < ۲$

پس m، دو مقدار صحیح دارد: $\{۰, ۱\}$

۲۰- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۴، درس ۲)

اولاً باید f در $x = a$ پیوسته باشد، پس حد راست، حد چپ و مقدارش در این نقطه برابرند.

حد راست و مقدار: $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} \frac{۱}{x} = \frac{۱}{a}$

حد چپ: $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} (bx + c) = ab + c$

این دو برابرند:

$$\frac{۱}{a} = ab + c \xrightarrow{\times a} \underbrace{۱ = a^۲b + ac}_{\text{رابطهٔ (۱)}}$$

ثانیاً باید مشتق راست و چپ در $x = a$ برابر باشند:

مشتق راست: $(\frac{۱}{x})' = -\frac{۱}{x^۲} = -\frac{۱}{a^۲}$

مشتق چپ: $(bx + c)' = b$

این دو نیز برابرند:

$$-\frac{۱}{a^۲} = b \Rightarrow a^۲b = -۱$$

در رابطهٔ (۱)، به‌جای $a^۲b$ می‌نویسیم -۱:

$$۱ = \underbrace{a^۲b}_{-۱} + ac \Rightarrow ۱ = -۱ + ac \Rightarrow ac = ۲$$

۲۱- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۵، درس ۲)

وقتی خط مماس بر منحنی، از منحنی عبور می‌کند، یعنی آن نقطه، نقطهٔ عطف است.

طول نقطهٔ عطف تابع درجهٔ سوم $y = x^۳ + ax^۲ + bx - ۱$ را به‌دست می‌آوریم:

$$y' = ۳x^۲ + ۲ax + b \Rightarrow y'' = ۶x + ۲a$$

$$y'' = ۰ \Rightarrow x = -\frac{a}{۳}$$

$-\frac{a}{۳}$ باید -۱ باشد:

$$-\frac{a}{۳} = -۱ \Rightarrow a = ۳$$

ضابطهٔ تابع به‌صورت $y = x^۳ + ۳x^۲ + bx - ۱$ شد. نقطهٔ $(-۴, -۱)$ روی این تابع است، پس:

$$-۴ = (-۱)^۳ + ۳(-۱)^۲ + b(-۱) - ۱ \Rightarrow -۴ = -۱ + ۳ - b - ۱ \Rightarrow -۴ = -b + ۱ \Rightarrow b = ۵$$

پس:

$$\frac{a}{b} = \frac{۳}{۵} = ۰/۶$$

۲۲- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۱ (فصل ۶، درس ۱)

با توجه به این‌که این ستون می‌تواند شامل ۱ یا ۲ یا ۳ مکعب مستطیل باشد، داریم:

۳ = تعداد حالات ستون شامل ۱ مکعب مستطیل

۶ = ۳ × ۲ = تعداد حالات ستون شامل ۲ مکعب مستطیل

۶ = ۳ × ۲ × ۱ = تعداد حالات ستون شامل ۳ مکعب مستطیل

۱۵ = ۳ + ۶ + ۶ = تعداد کل حالات

۲۳- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۱ (فصل ۷، درس ۱)

$n(S) = ۶ \times ۶ = ۳۶$

با توجه به این‌که یکی از تاس‌ها اول بوده و مجموع آن‌ها حداقل ۶ است، حالات مطلوب به‌صورت زیر است:

$$A = \left\{ \begin{array}{l} (۲,۴),(۲,۵),(۲,۶) \\ (۳,۳),(۳,۴),(۳,۵),(۳,۶) \\ (۵,۱),(۵,۲),(۵,۳),(۵,۴),(۵,۵),(۵,۶) \\ (۴,۲),(۶,۲),(۴,۳),(۶,۳),(۱,۵),(۴,۵),(۶,۵) \end{array} \right\}$$

$$n(A) = ۲۰ \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۲۰}{۳۶} = \frac{۵}{۹}$$

۲۴- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * آمار و احتمال (فصل ۳، درس‌های ۲ و ۳)

نکته (میانگین یا متوسط داده‌ها): میانگین یا متوسط n دادهٔ $x_۱$، $x_۲$، ... و x_n را با نماد $\bar{x}$ نشان می‌دهیم و آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=۱}^{n} x_i}{n} = \frac{x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n}{n}$$

داده‌های دستهٔ اول را $x_۱, x_۲, x_۳, x_۴$ و داده‌های دستهٔ دوم را $y_۱, y_۲, y_۳, y_۴, y_۵$ در نظر می‌گیریم. میانگین هر دو دسته برابر و مساوی با عدد a در نظر می‌گیریم.

$$\frac{x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴}{۴} = a \Rightarrow x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۴a \quad (۱)$$

$$\frac{y_۱ + y_۲ + y_۳ + y_۴ + y_۵}{۵} = a \Rightarrow y_۱ + y_۲ + y_۳ + y_۴ + y_۵ = ۵a \quad (۲)$$

طرفین روابط (۱) و (۲) را با هم جمع می‌کنیم.

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + y_۱ + y_۲ + y_۳ + y_۴ + y_۵ = ۹a \quad (I)$$

فرض می‌کنیم دادهٔ $x_۱$ از دستهٔ اول را با دادهٔ $y_۱$ از دستهٔ دوم جابه‌جا کرده‌ایم.

$$\frac{y_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴}{۴} = b \Rightarrow y_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۴b \quad (۳)$$

$$\frac{x_۱ + y_۲ + y_۳ + y_۴ + y_۵}{۵} = b \Rightarrow x_۱ + y_۲ + y_۳ + y_۴ + y_۵ = ۵b \quad (۴)$$

طرفین روابط (۳) و (۴) را با هم جمع می‌کنیم.

$$y_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۱ + y_۲ + y_۳ + y_۴ + y_۵ = ۹b \quad (II)$$

از روابط (I) و (II) نتیجه می‌شود که $a = b$. بنابراین اگر طرفین روابط (۱) و (۳) را از هم کم کنیم، داریم:

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ - y_۱ - x_۲ - x_۳ - x_۴ = ۴a - ۴b = ۰ \Rightarrow x_۱ - y_۱ = ۰ \Rightarrow x_۱ = y_۱$$

بنابراین دستهٔ اول بعد از جابه‌جایی داده‌ها تغییری نمی‌کند و داده‌ها، همان داده‌های اول هستند و بنابراین واریانس آن‌ها نیز تغییری نکرده و واریانس داده‌های دستهٔ اول بعد ازجابه‌جایی داده‌ها، همان ۱/۲۵ است.

۲۵- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * آمار و احتمال (فصل ۲، درس ۳)

نکتهٔ ۱: فرض کنید B_1، B_2، ... و B_n پیشامدهایی با احتمال ناصفر باشند که فضای نمونه را افراز می‌کنند. در این صورت، برای هر پیشامد دلخواه A، داریم:

$$P(A)=P(B_1)P(A\mid B_1)+P(B_2)P(A\mid B_2)+\cdots+P(B_n)P(A\mid B_n)=\sum_{k=1}^{n}P(B_k)P(A\mid B_k)$$

نکتهٔ ۲: فرض کنید B_1، B_2، ... و B_n پیشامدهایی با احتمال ناصفر باشند که فضای نمونه را افراز می‌کنند. در این صورت، برای هر پیشامد دلخواه A و هر $i\le n$ داریم:

$$P(B_i\mid A)=\frac{P(B_i)P(A\mid B_i)}{P(A)}$$

احتمال آنکه این دانش‌آموز از مدرسهٔ A یا B باشد به‌صورت زیر است.

$$n(A)=\frac{3}{2}n(B)\Rightarrow n(S)=n(A)+n(B)=\frac{3}{2}n(B)+n(B)=\frac{5}{2}n(B)$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\frac{3}{2}n(B)}{\frac{5}{2}n(B)}=\frac{3}{5}\ ,\ P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{n(B)}{\frac{5}{2}n(B)}=\frac{2}{5}$$

حال با در نظر گرفتن نمودار درختی زیر و نکات فوق داریم:

$\frac{3}{5}$ از مدرسهٔ A باشد $\Rightarrow$ احتمال قبول شدن $=\frac{60}{100}=\frac{6}{10}$

$\frac{2}{5}$ از مدرسهٔ B باشد $\Rightarrow$ احتمال قبول شدن $=\frac{70}{100}=\frac{7}{10}$

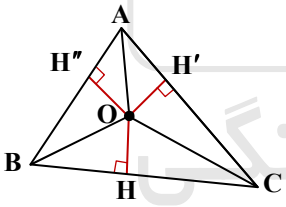
$$P(\text{قبول شدن})=\frac{3}{5}\times\frac{6}{10}+\frac{2}{5}\times\frac{7}{10}=\frac{18+14}{50}=\frac{32}{50}$$

$$P(\text{از مدرسهٔ A}\mid\text{قبول شدن})=\frac{P(\text{از مدرسهٔ A})\cdot P(\text{قبول شدن}\mid\text{از مدرسهٔ A})}{P(\text{قبول شدن})}=\frac{\frac{3}{5}\times\frac{6}{10}}{\frac{32}{50}}=\frac{18}{32}=\frac{9}{16}$$

۲۶- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۱ (فصل ۱، درس ۲)

نکته: هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.

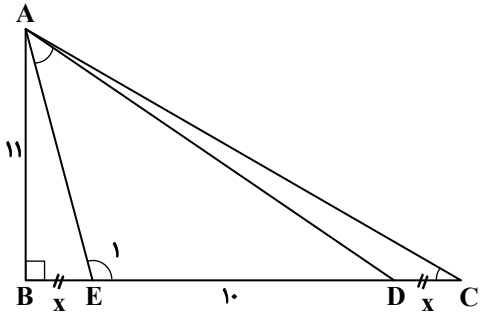
در هر مثلث، نقطهٔ تلاقی سه نیمساز داخلی، از سه ضلع مثلث به یک فاصله است.



$$OH=OH'=OH''$$

۲۷- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۱ (فصل ۲، درس ۳)

نکته: هرگاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلث دیگر هم‌اندازه باشند، دو مثلث متشابه‌اند.



دو مثلث ADE و AEC به‌دلیل داشتن دو زاویهٔ برابر، متشابه هستند.

$$\begin{cases}D\hat{A}E=A\hat{C}D\\ \hat{E}_1=\hat{E}_1\ \text{مشترک}\end{cases}\Rightarrow \overset{\triangle}{ADE}\sim\overset{\triangle}{AEC}\Rightarrow\frac{AD}{AC}=\frac{AE}{CE}=\frac{ED}{AE}$$

با فرض $BE=DC=x$ داریم:

$$\frac{AE}{CE}=\frac{ED}{AE}\Rightarrow AE^2=ED\cdot CE=10(10+x)=100+10x$$

$$\Rightarrow AE^2=100+10x\quad(1)$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABE رابطهٔ فیثاغورس را می‌نویسیم:

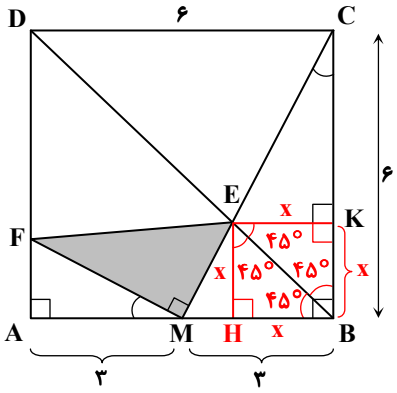
$$AE^2=AB^2+BE^2\Rightarrow AE^2=11^2+x^2\xrightarrow{(1)}121+x^2=100+10x$$

$$\Rightarrow x^2-10x+21=0\Rightarrow(x-3)(x-7)=0\Rightarrow\begin{cases}x=3\\ x=7\end{cases}\Rightarrow DC=7$$

۲۸- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۱ (فصل ۲، درس ۳)

نکته: هرگاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلث دیگر هم‌اندازه باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

راه‌حل اول: دو مثلث BCM و AFM متشابه‌اند، زیرا:



$$\begin{cases}\hat{BCM} = \hat{AMF} \\ \hat{A} = \hat{B} = 90^\circ\end{cases} \Rightarrow \overset{\triangle}{BCM} \sim \overset{\triangle}{AMF}$$

$$\Rightarrow \frac{BM}{AF} = \frac{BC}{AM} \Rightarrow \frac{3}{AF} = \frac{6}{3} \Rightarrow AF = \frac{3}{2}$$

اندازهٔ ضلع MF را می‌یابیم.

$$MF^2 = AM^2 + AF^2 \Rightarrow MF^2 = 3^2 + (\frac{3}{2})^2 = 9 + \frac{9}{4} = 9 \times \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow MF = \frac{3}{2}\sqrt{5}$$

از E بر BC و BM ارتفاع رسم می‌کنیم. در مربع، قطر نیمساز است، بنابراین با توجه به شکل، چهارضلعی EKBH مربعی به ضلع x است و داریم:

$$EK \parallel MB \Rightarrow \frac{CK}{BC} = \frac{EK}{MB} \Rightarrow \frac{6-x}{6} = \frac{x}{3} \Rightarrow 6 - x = 2x \Rightarrow 6 = 3x \Rightarrow x = 2 \Rightarrow MH = 3 - x = 3 - 2 = 1$$

در مثلث EMH داریم:

$$ME^2 = EH^2 + MH^2 = 2^2 + 1^2 = 5 \Rightarrow ME = \sqrt{5}$$

$$S_{\overset{\triangle}{EFM}} = \frac{1}{2} MF \cdot ME = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}\sqrt{5} \times \sqrt{5} = \frac{15}{4} = 3/75$$

راه‌حل دوم: برای به‌دست آوردن اندازهٔ ME، می‌توان از تشابه دو مثلث CDE و EMB استفاده کرد.

$$CD \parallel MB \Rightarrow \overset{\triangle}{CDE} \sim \overset{\triangle}{EMB} \Rightarrow \frac{CE}{ME} = \frac{CD}{MB} \Rightarrow \frac{CE}{ME} = \frac{6}{3} = 2 \Rightarrow CE = 2ME$$

$$CM = CE + ME = 2ME + ME \Rightarrow CM = 3ME$$

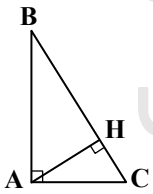
با استفاده از فیثاغورس در مثلث CMB داریم:

$$CM^2 = CB^2 + BM^2 \Rightarrow 9ME^2 = 36 + 9 = 45 \Rightarrow ME^2 = 5 \Rightarrow ME = \sqrt{5}$$

ادامهٔ راه‌حل مانند راه‌حل اول است.

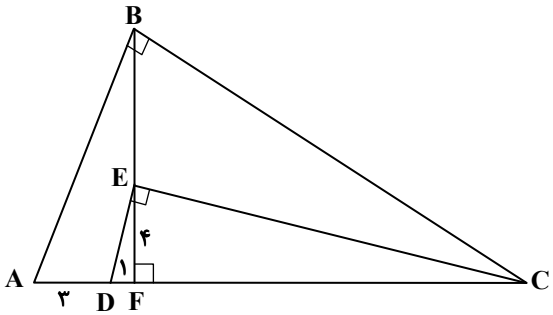
۲۹- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۱ (فصل ۲، درس ۳)

نکته: در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، اگر AH ارتفاع وارد بر وتر باشد، داریم:



$$\begin{cases}AH^2 = BH \cdot CH \\ AB^2 = BH \times BC \\ AC^2 = CH \times BC\end{cases}$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ DEC، EF ارتفاع وارد بر وتر است و داریم:



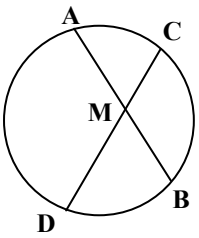
$$EF^2 = DF \cdot FC \Rightarrow 4^2 = 1 \times FC \Rightarrow FC = 16$$

همچنین در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، BF ارتفاع وارد بر وتر است و داریم:

$$BC^2 = CF \cdot CA = 16 \times (16 + 4) = 16 \times 20 \Rightarrow BC = 4\sqrt{20} = 4 \times 2\sqrt{5} = 8\sqrt{5}$$

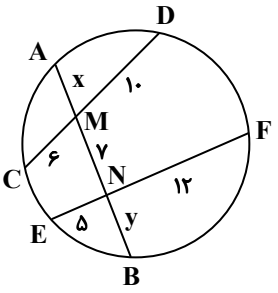
۳۰- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۲ (فصل ۱، درس ۲)

نکته: هرگاه خط‌های شامل دو وتر دلخواه AB و CD در نقطه‌ای مانند M درون دایره یکدیگر را قطع کنند. آن‌گاه:



$$MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

با فرض $AM = x$ و $BN = y$ و استفاده از نکتهٔ فوق داریم:



$$MA \cdot MB = MC \cdot MD \Rightarrow x(y+۷) = ۶ \times ۱۰ = ۶۰ \quad (۱)$$

$$NB \cdot NA = NE \cdot NF \Rightarrow y(x+۷) = ۵ \times ۱۲ = ۶۰ \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow x(y+۷) = y(x+۷) \Rightarrow xy + ۷x = xy + ۷y \Rightarrow ۷x = ۷y \Rightarrow x = y$$

با جای‌گذاری رابطهٔ فوق در (۱) داریم:

$$x(x+۷) = ۶۰ \Rightarrow x^۲ + ۷x - ۶۰ = ۰ \Rightarrow (x-۵)(x+۱۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۵ \\ x = -۱۲ \end{cases}$$ غیرقابل قبول

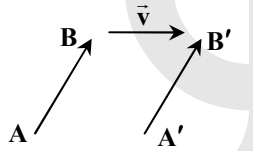
$$AB = x + ۷ + y = x + ۷ + x = ۵ + ۷ + ۵ = ۱۷$$

۳۱- پاسخ: گزینه‌های ۲، ۳ و ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۲ (فصل ۲، درس ۱)

در تبدیل‌های دوران، انتقال و تجانس همواره جهت شکل حفظ می‌شود.

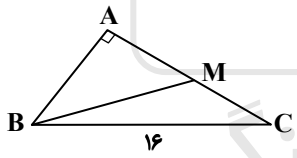
بنابراین گزینه‌های ۲، ۳ و ۴ صحیح هستند.

توجه: احتمالاً هدف طراح از «جهت»، راستای نوک پیکان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{A'B'}$ بوده که در انتقال تحت بردار $\vec{v}$ تغییر نمی‌کند که در این صورت جواب گزینهٔ ۳ است.



۳۲- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۱ (فصل ۲، درس ۳ و فصل ۳، درس ۲)

می‌دانیم اگر در مثلثی، میانهٔ وارد بر یک ضلع، نصف آن ضلع باشد، مثلث قائم‌الزاویه است. بنابراین مثلث موردنظر، متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه است که اندازهٔ وتر آن برابر ۱۶ است و طبق شکل مقابل داریم:



$$AB = AC \ , \ AB^۲ + AC^۲ = BC^۲ \Rightarrow ۲AC^۲ = BC^۲$$

$$\Rightarrow AC\sqrt{۲} = BC = ۱۶ \Rightarrow AC = \frac{۱۶}{\sqrt{۲}} = ۸\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow AB = ۸\sqrt{۲} \ , \ AM = \frac{۱}{۲}AC = \frac{۱}{۲} \times ۸\sqrt{۲} = ۴\sqrt{۲}$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABM، رابطهٔ فیثاغورس را می‌نویسیم.

$$BM^۲ = AB^۲ + AM^۲$$

$$\Rightarrow BM^۲ = (۸\sqrt{۲})^۲ + (۴\sqrt{۲})^۲ = ۶۴ \times ۲ + ۱۶ \times ۲ = ۱۶۰$$

$$\Rightarrow BM = ۴\sqrt{۱۰}$$

۳۳- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (فصل ۱، درس ۱)

در خواستهٔ سؤال، A را از سمت چپ و B را از سمت راست فاکتور می‌گیریم.

$$A\begin{bmatrix} ۰ & ۳ \\ -۶ & -۱ \end{bmatrix}B - \frac{۳}{۲}A\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ -۴ & \frac{۴}{۳} \end{bmatrix}B = A\left(\begin{bmatrix} ۰ & ۳ \\ -۶ & -۱ \end{bmatrix} - \frac{۳}{۲}\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ -۴ & \frac{۴}{۳} \end{bmatrix}\right)B = A\left(\begin{bmatrix} ۰ & ۳ \\ -۶ & -۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۳ & ۳ \\ -۶ & ۲ \end{bmatrix}\right)B = A\begin{bmatrix} -۳ & ۰ \\ ۰ & -۳ \end{bmatrix}B$$

$$= A(-۳I)B = -۳AIB = -۳AB = -۳\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۹ & -۶ \\ -\frac{۳}{۲} & -۱ \end{bmatrix}$$

حاصل‌ضرب درایه‌های غیر قطر اصلی $= -۶ \times (-\frac{۳}{۲}) = ۹$

۳۴- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (فصل ۱، درس ۱)

ابتدا ماتریس A^2 را محاسبه می‌کنیم.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

برای یافتن سطر سوم ماتریس A^3، طبق رابطهٔ $A^3 = A \cdot A^2$ کافی است سطر سوم A را در ماتریس A^2 ضرب کنیم.

$$A^3 = AA^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ -10 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

بنابراین گزینهٔ ۲ صحیح است.

۳۵- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (فصل ۲، درس ۳)

نکته: خروج از مرکز هر بیضی با طول قطر بزرگ $2a$ و اندازهٔ فاصلهٔ کانونی $2c$ برابر $\frac{c}{a}$ است.

نکته: در بیضی همواره رابطهٔ $a^2 = b^2 + c^2$ برقرار است.

نقاط $F(3,0)$ و $F'(-3,0)$ کانون‌های بیضی هستند، پس داریم:

$$FF' = \sqrt{(3+3)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{36} = 6 \Rightarrow 2c = 6 \Rightarrow c = 3$$

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{3}{a} = \frac{1}{3} \Rightarrow a = 9$$

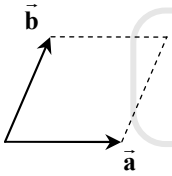
حال مقدار b را محاسبه می‌کنیم.

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 81 = b^2 + 9 \Rightarrow b^2 = 72 \Rightarrow b = 6\sqrt{2}$$

$$\text{قطر کوچک} = 2b = 2 \times 6\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$$

۳۶- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (فصل ۳، درس ۲)

نکتهٔ ۱: مساحت متوازی‌الاضلاع ساخته‌شده بر روی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر است با اندازهٔ حاصل‌ضرب خارجی آن‌ها، یعنی:

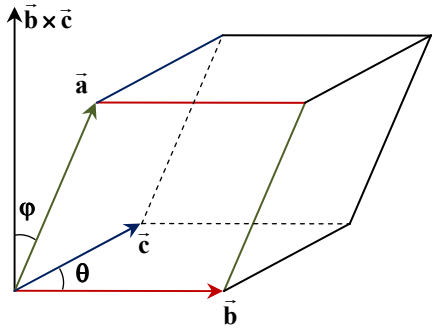


$$S = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

نکتهٔ ۲: حاصل‌ضرب خارجی دو بردار $\vec{V}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ و $\vec{V}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ را می‌توان از دترمینان زیر به‌دست آورد.

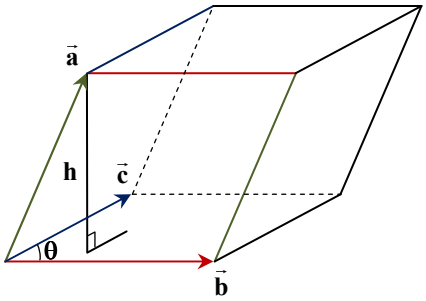
$$\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

نکتهٔ ۳: حجم متوازی‌السطوح ساخته‌شده بر روی ۳ بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.



$$k = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \Rightarrow \text{حجم} : V = |k|$$

طبق شکل مقابل، ابتدا $\vec{b}\times\vec{c}$ رامحاسبه می‌کنیم.



$$\vec{b}=(-1,2,3)\ ,\ \vec{c}=(3,-2,1)$$

$$\Rightarrow \vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-1&2&3\\3&-2&1\end{vmatrix}=8\vec{i}+10\vec{j}-4\vec{k}$$

مساحت قاعده برابر با $|\vec{b}\times\vec{c}|$ است. $S=|\vec{b}\times\vec{c}|=\sqrt{64+100+16}=\sqrt{180}=6\sqrt{5}$

حال حجم متوازی‌السطوح را به‌دست می‌آوریم.

$$\vec{a}=(2,-3,4)\Rightarrow \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=(2,-3,4)\cdot(8,10,-4)=16-30-16=-30$$

$$\Rightarrow V=|-30|=30\Rightarrow S\cdot h=30\Rightarrow h=\frac{30}{S}=\frac{30}{6\sqrt{5}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

۳۷- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضی ۱ (فصل ۶، درس ۲) و ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۲)

مجموع ارقام به‌صورت $23n+1$ است. برای $n=0$، مجموع ارقام برابر ۱ است و دو عدد متوالی ۱ و ۰ هستند و عدد ۵رقمی موردنظر، عدد ۱۰۰۰۰ است.

حال اگر دو عدد متوالی کمتر از ۱۰ را x و $x+1$ در نظر بگیریم، حالات زیر را داریم:

۱) $x,x+1,x+1,x+1,x+1\Rightarrow$ مجموع ارقام $=5x+4=23n+1$

$$n=1\Rightarrow 5x+4=24\Rightarrow x=4\Rightarrow \text{ارقام}:4,5,5,5,5\Rightarrow \text{تعداد اعداد}=\frac{5!}{4!}=5$$

۲) $x,x,x+1,x+1,x+1\Rightarrow$ مجموع ارقام $=5x+3=23n+1$

$$n=1\Rightarrow 5x+3=24\Rightarrow 5x=21\Rightarrow x=\frac{21}{5}\quad \text{غیرقابل‌قبول}$$

با توجه به این‌که حداکثر x برابر ۸ است، برای $n\geq 2$، رابطهٔ $5x+3=23n+1$ غیرممکن است.

۳) $x,x,x,x+1,x+1\Rightarrow$ مجموع ارقام $=5x+2=23n+1$

$$n=1\Rightarrow 5x+2=24\Rightarrow x=\frac{22}{5}\quad \text{غیرقابل قبول}$$

برای $n\geq 2$، رابطهٔ $5x+2=23n+1$ غیرممکن است.

۴) $x,x,x,x,x+1\Rightarrow$ مجموع ارقام $=5x+1=23n+1\Rightarrow 5x=23n$

با توجه به این‌که $1\leq x\leq 8$ و $n\geq 1$، رابطهٔ فوق غیرممکن است.

بنابراین در مجموع، $5+1=6$ عدد با ویژگی خواسته‌شده وجود دارد.

۳۸- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۳)

با توجه به این‌که $11\times 37=407$ و $16\times 37=592$ است. اگر اعضای مجموعه را با a نشان دهیم، داریم:

$$a=407r+592s=37\times 11r+37\times 16s=37(11r+16s)$$

بنابراین کوچک‌ترین عضو مثبت این مجموعه زمانی به‌وجود می‌آید که $11r+16s=1$ و چون این معادلهٔ سیاله جواب دارد $(1\mid(11,16))$، پس کوچک‌ترین عضو مثبت، عدد $m=37$ است و داریم:

$$m\text{ مجموع ارقام}=3+7=10$$

۳۹- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضیات گسسته (فصل ۳، درس ۲)

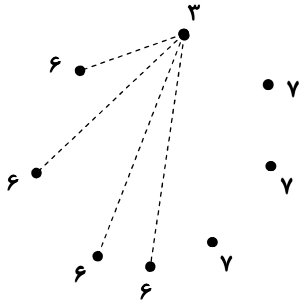
$$\boxed{3},\boxed{4},\boxed{5},6,\boxed{7},8,9,12,\boxed{13},14,15,16,\boxed{17},18,\boxed{19},20$$

در بدترین حالت اگر تمام اعداد مشخص‌شدهٔ فوق را انتخاب کنیم، در بین آن‌ها هیچ دو عدد متمایز دارای مقسوم‌علیه مشترک غیر یک وجود ندارد، حال اگر یک عدد دیگر انتخاب کنیم، قطعاً با یکی از ۷ عدد قبلی، دارای مقسوم‌علیه مشترک غیر یک است، پس حداقل باید ۸ عدد انتخاب کنیم.

۴۰- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۲، درس ۱)

نکته: گراف کامل مرتبهٔ p گرافی است که درجهٔ همهٔ رأس‌های آن $p-1$ و تعداد یال‌های آن برابر $\binom{p}{2}=\frac{p(p-1)}{2}$ است.

در گراف داده‌شده، تعداد رئوس $p=8$ و تعداد یال‌ها $q=24$ است. در گراف کامل با ۸ رأس یعنی در K_8 داریم: $q(K_8)=\frac{8\times 7}{2}=28$



گراف داده‌شده، ۴ یال کمتر از گراف کامل K_8 دارد. برای این‌که مقدار δ کمترین مقدار ممکن باشد، این ۴ یال را از یک رأس حذف می‌کنیم. یعنی گراف به‌صورت مقابل است. توجه کنید که در شکل مقابل درجهٔ هر رأس را کنار آن نوشته و یال‌های حذف‌شده را به‌صورت نقطه‌چین نشان داده‌ایم. پس کمترین مقدار δ برابر $3=4-7$ است.

فیزیک

۴۱- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۶)

در فرایند واپاشی بتای منفی داریم:

$$^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z+1}Y + {}^{0}_{-1}e \qquad {}^{176}_{71}Lu \rightarrow {}^{176}_{72}Hf + {}^{0}_{-1}e$$

۴۲- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۵)

در مرحلهٔ ضربهٔ تراکم سوپاپ‌های ورودی و خروجی هر دو بسته هستند.

۴۳- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۳)

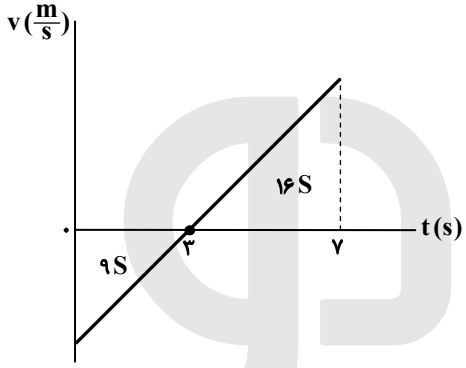
از قضیهٔ کار و انرژی جنبشی داریم:

$$W_t = \Delta K \Rightarrow W_t = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) \Rightarrow W_t = \frac{1}{2}\times\frac{450}{1000}\times(16^2 - 20^2) = \frac{1}{4}\times\frac{90}{100}\times(16+20)(16-20)$$

$$= \frac{1}{4}\times\frac{9}{10}\times(36)(-4) = -32/4\,J$$

۴۴- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

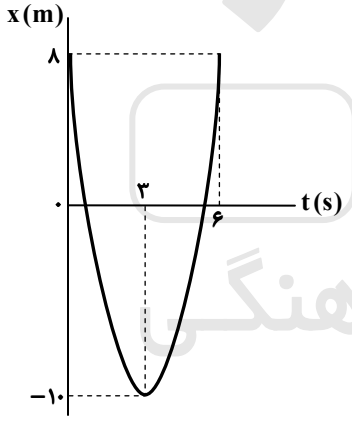
ابتدا نمودار سرعت- زمان متحرک را رسم می‌کنیم:



$$\frac{s_{av}}{|v_{av}|} = \frac{\ell}{\Delta x} = \frac{25S}{7S} = \frac{25}{7}$$

۴۵- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

ابتدا نمودار $x-t$ متحرک را رسم می‌کنیم:

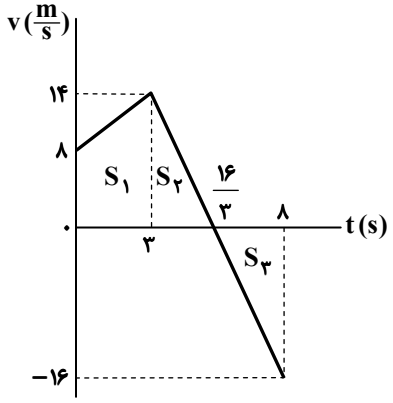


$$2t^2 - 12t + 8 = -8 \Rightarrow t^2 - 6t + 8 = 0$$
$$\Rightarrow (t-2)(t-4) = 0$$
$$\Rightarrow t_1 = 2s \ , \ t_2 = 4s$$

در بازه‌های زمانی صفر تا ۲s و ۴s تا ۶s یعنی در کل به‌مدت ۴ ثانیه، فاصله متحرک تا مبدأ کمتر از ۸ متر است.

۴۶- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

نمودار سرعت- زمان متحرک را رسم می‌کنیم:



با استفاده از مساحت سطح زیر نمودار سرعت- زمان می‌توان مسافت طی‌شده توسط متحرک را محاسبه کرد:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{S_1 + S_2 + |S_3|}{\Delta t} = \frac{33 + \frac{49}{3} + \frac{64}{3}}{8} = \frac{212}{8\times3} = \frac{53}{6}\frac{m}{s}$$

۴۷- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

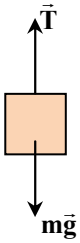
ابتدا معادلهٔ مکان- زمان متحرک را در زمان‌های مختلف می‌نویسیم:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \Rightarrow \begin{cases} t_1=n \Rightarrow x_1=\frac{1}{2}an^2 \\ t_2=2n \Rightarrow x_2=4\times\frac{1}{2}an^2=4x_1 \\ t_3=3n \Rightarrow x_3=9\times\frac{1}{2}an^2=9x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{جابه‌جایی در n ثانیهٔ دوم}: \Delta x_2=x_2-x_1=3x_1 \\ \text{جابه‌جایی در n ثانیهٔ سوم}: \Delta x_3=x_3-x_2=5x_1 \end{cases} \Rightarrow \frac{\Delta x''}{\Delta x'}=\frac{5}{3}$$

۴۸- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

نیروهای وارد بر جسم در راستای قائم را روی شکل مشخص می‌کنیم:



جهت شتاب جسم رو به پایین است، بنابراین نیروی وزن از نیروی کشش نخ بزرگ‌تر است:

$$F=ma \Rightarrow mg-T=ma \Rightarrow mg-0/8mg=T \Rightarrow \frac{T}{mg}=\frac{1}{5}$$

۴۹- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

$$\begin{cases} T_A=T_B \\ m_A=m_B \Rightarrow F_B>F_A \\ F=m\frac{4\pi^2r}{T^2} \end{cases}$$

نیروی مرکزگرای وارد بر جسم همان نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه است.

شرط زودتر لغزیدن جسم: $F>f_{s,max} \Rightarrow F>\mu_s mg \xrightarrow{F_B>F_A}$ جسم B زودتر می‌لغزد.

۵۰- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

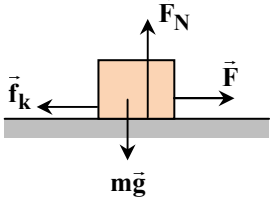
$$f_{s,max}=\mu_s F_N \Rightarrow f_{s,max}=\mu_s mg \Rightarrow f_{s,max}=\frac{1}{2}\times 100=50N$$

$f_{s,max}<F \Rightarrow$ جسم حرکت می‌کند

$$f_k=\mu_k F_N=\frac{1}{4}\times 100=25\,N$$

بنابراین نیروی خالص وارد بر جسم برابر است با:

$$F_t=F-f_k=55-25=30N$$



۵۱- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۳)

از قضیهٔ کار و انرژی جنبشی داریم:

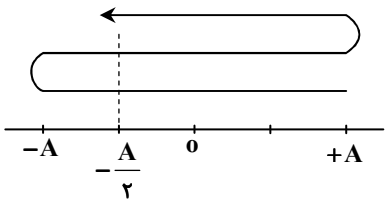
$$W_t=\Delta K \xrightarrow{W_t=W_f} W_f=\Delta K$$

$$\Rightarrow fd=\frac{1}{2}mv_0^2 \Rightarrow f\times 10=\frac{1}{2}\times 1600\times 10^2 \Rightarrow f=8000N$$

۵۲- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۳)

$$\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow\frac{۱۶\pi}{۳}=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{۳}{۸}s\Rightarrow\frac{\Delta t}{T}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow\Delta t=T+\frac{T}{۴}+\frac{T}{۱۲}$$

مسیر حرکت نوسانگر را رسم می‌کنیم:



$$\begin{cases}\ell=\frac{۱۱A}{۲}\\ |\Delta x|=\frac{۳A}{۲}\end{cases}\Rightarrow\frac{s_{av}}{|v_{av}|}=\frac{۱۱}{۳}$$

۵۳- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۳)

$$E=\frac{۱}{۲}kA^{۲}\xrightarrow{k,A=\text{ثابت}}E_{۲}=E_{۱}=۸J$$

۵۴- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۳)

$$\beta=۱۰\log\frac{I}{I_{۰}}\Rightarrow۹۰=۱۰\log\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}\Rightarrow۹=\log\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}\Rightarrow\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}=۱۰^{۹}\Rightarrow I=۱۰^{-۳}\frac{W}{m^{۲}}$$

اکنون می‌توان آهنگ انتقال انرژی را محاسبه کرد:

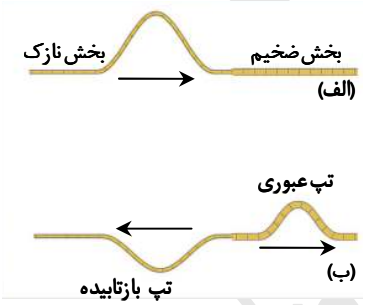
$$I=\frac{P}{A}\Rightarrow P=IA=۱۰^{-۳}\times۱۰^{-۴}=۱۰^{-۷}W=۱۰^{-۱}\mu W$$

۵۵- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۴)

$$\begin{cases}f=\frac{nv}{۲L}\\ v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}=\sqrt{\frac{FL}{m}}\end{cases}\Rightarrow f=\frac{n}{۲L}\sqrt{\frac{FL}{m}}=\frac{۴}{۲\times\frac{۶}{۱۰}}\sqrt{\frac{۳۲۴\times\frac{۶}{۱۰}}{\frac{۶}{۱۰۰۰}}}\Rightarrow f=\frac{۴۰}{۱۲}\times۱۸\times۱۰=۶۰۰Hz$$

۵۶- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۴)

مطابق شکل گزینهٔ ۴ درست است.



۵۷- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۵)

از فرمول ریدبرگ داریم:

$$\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{n'^{۲}}-\frac{۱}{n^{۲}})$$

اولین و دومین خط طیفی رشتهٔ پاشن به‌ترتیب دارای $n=۴$ و $n=۵$ است.

$$\begin{cases}n=۴\Rightarrow\frac{۱}{\lambda_{۱}}=R(\frac{۱}{۹}-\frac{۱}{۱۶})=R(\frac{۷}{۹\times۱۶})\\ n=۵\Rightarrow\frac{۱}{\lambda_{۲}}=R(\frac{۱}{۹}-\frac{۱}{۲۵})=R(\frac{۱۶}{۹\times۲۵})\end{cases}\Rightarrow\frac{\lambda_{۱}}{\lambda_{۲}}=\frac{\frac{۱۶}{۷}}{\frac{۲۵}{۱۶}}=\frac{۲۵۶}{۱۷۵}$$

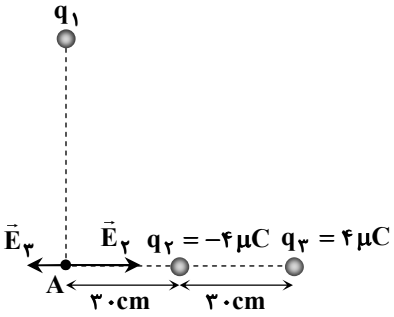
۵۸- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۵)

ابتدا انرژی فوتونی که به فلز می‌تابد را محاسبه می‌کنیم:

$$hf=E_{۴}-E_{۱}=E_{R}(\frac{۱}{۱^{۲}}-\frac{۱}{۴^{۲}})\Rightarrow hf=-۰/۸۵+۱۳/۶=۱۲/۷۵eV$$

$$K_{max}=hf-W_{۰}\Rightarrow K_{max}=۱۲/۷۵-۵/۲=۷/۵۵eV$$

۵۹- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۱)



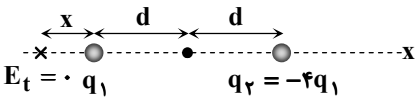
$$E = k\frac{q}{r^2} \Rightarrow \begin{cases} E_2 = 9\times10^9 \times \frac{4\times10^{-6}}{9\times10^{-2}} = 4\times10^5 \frac{N}{C} \\ E_3 = \frac{1}{4}E_2 = 10^5 \frac{N}{C} \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_{t,x} = 3\times10^5 \frac{N}{C} \\ E_t = 5\times10^5 \frac{N}{C} \end{cases} \Rightarrow E_{t,y} = 4\times10^5 \frac{N}{C}$$

$$4\times10^5 = 9\times10^9 \times \frac{|q_1|}{36\times10^{-2}} \Rightarrow |q_1| = 16\times10^{-6}\,C = 16\,\mu C$$

۶۰- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۱)

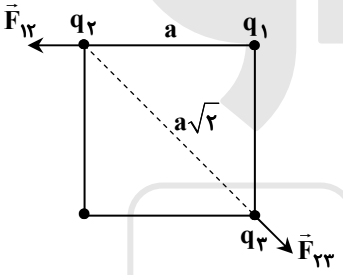
با توجه به ناهمنام بودن بار ذرات q_1 و q_2 میدان الکتریکی خالص در خارج از حد فاصل دو بار و نزدیک به بار کوچک‌تر صفر است.



$$E_t = 0 \Rightarrow E_1 = E_2 \Rightarrow k\frac{q_1}{x^2} = \frac{k|q_2|}{(x+2d)^2} \Rightarrow \frac{q_1}{x^2} = \frac{4q_1}{(x+2d)^2} \Rightarrow (x+2d)^2 = 4x^2 \Rightarrow x+2d = \pm 2x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2d = 2x \Rightarrow x = 2d \ \checkmark \\ x+2d = -2x \Rightarrow -3x = 2d \Rightarrow x = -\frac{2}{3}d \ \times \end{cases}$$

۶۱- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۱)



$$F = \frac{kqq'}{r^2} \Rightarrow \begin{cases} F_{12} = \frac{kq_1q_2}{r_{12}^2} = \frac{kq^2}{a^2} \\ F_{23} = \frac{kq_2q_3}{r_{23}^2} = \frac{kq^2}{2a^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{F_{12}}{F_{23}} = 2$$

۶۲- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۲)

قبل از بستن کلید مقاومت‌های ۵ و ۲۰ اهمی با هم موازی و مقاومت معادل آن‌ها با مقاومت ۲ اهمی متوالی است.

$$R_{20,5} = \frac{5\times20}{5+20} = 4\,\Omega$$

$$R_{eq,1} = 4+2 = 6\,\Omega$$

$$I = \frac{\mathscr{E}}{r+R_{eq}} \Rightarrow I_1 = \frac{\mathscr{E}}{2+6} = \frac{\mathscr{E}}{8}$$

$$P = VI = \mathscr{E}I - rI^2 \Rightarrow P_1 = \frac{\mathscr{E}^2}{8} - 2\frac{\mathscr{E}^2}{64} = \frac{\mathscr{E}^2}{8} - \frac{\mathscr{E}^2}{32} = \frac{3}{32}\mathscr{E}^2$$

پس از بستن کلید:

$$R_{eq,2} = \frac{6\times6}{6+6} = \frac{36}{12} = 3\,\Omega$$

$$I_2 = \frac{\mathscr{E}}{2+3} = \frac{\mathscr{E}}{5}$$

$$P_2 = \frac{\mathscr{E}^2}{5} - 2\left(\frac{\mathscr{E}^2}{25}\right) = \frac{3}{25}\mathscr{E}^2$$

$$\frac{\Delta P_1}{P_1}\times100 = \left(\frac{P_2}{P_1}-1\right)\times100 = \left(\frac{\frac{3}{25}}{\frac{3}{32}}-1\right)\times100 = \%28$$

مؤسسه آموزشی فرهنگی

۶۳- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۲)

در حالت اول داریم:

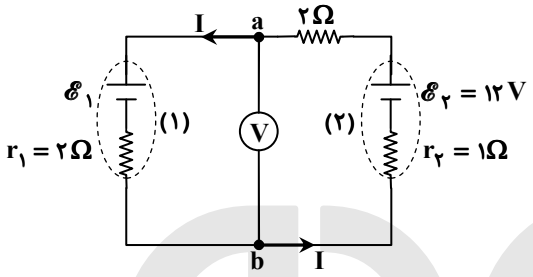
$$P=\frac{V^2}{R} \Rightarrow \begin{cases} P_A=\frac{V^2}{R_A} \\ P_B=\frac{V^2}{R_B} \end{cases} \xrightarrow{P_A=2P_B} R_B=2R_A$$

در حالت دوم داریم:

$$P=RI^2 \Rightarrow \begin{cases} P'_A=R_AI^2 \\ P'_B=R_BI^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{P'_A}{P'_B}=\frac{R_A}{R_B}=\frac{1}{2}$$

۶۴- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۲)

با توجه به اطلاعات سؤال باتری ۲ تولیدکننده و باتری ۱ مصرف‌کننده است؛ بنابراین جریان مدار پادساعتگرد است.



$$V_a+2I-12+I=V_b \Rightarrow V_a-V_b=12-3I$$

$$\xrightarrow{V_a-V_b=8/4V} 8/4=12-3I \Rightarrow I=1/2A$$

$$V_2=\mathscr{E}_2-r_2I \Rightarrow V_2=12-1(1/2)=10/8V$$

$$V_1=8/4V$$

$$P=VI \Rightarrow \frac{P_2}{P_1}=\frac{V_2}{V_1} \Rightarrow \frac{P_2}{P_1}=\frac{10/8}{8/4}=\frac{9}{7}$$

۶۵- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۳)

با توجه به اینکه جهت نیروی مغناطیسی وارد بر ذرات q_1 و q_2 به‌سمت مرکز دایره‌هاست و از قاعدهٔ دست راست نتیجه می‌گیریم کـه $q_1<0$ و $q_2>0$ است.

$$\begin{cases} F_c=m\frac{v^2}{r} \\ F_B=|q|vB \end{cases} \Rightarrow r=\frac{mv}{|q|B} \xrightarrow{r_2>r_1} |q_1|>|q_2|$$

۶۶- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۳)

با استفاده از قاعدهٔ دست راست، جهت نیروی وارد بر سیم به‌سمت پایین است.

$$F=I\ell B\sin\theta=2\times2\times\frac{45}{100}\times10^{-4}\times1=1/8\times10^{-4}N$$

۶۷- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۴)

با استفاده از اندازهٔ شیب نمودار $\Phi-t$ در بازه‌های زمانی مختلف می‌توان بزرگی نیروی محرکهٔ القایی را در پیچه محاسبه کرد.

$$\begin{cases} t_1 \text{ تا } 0 \text{ : در بازهٔ } \mathscr{E}_1=\frac{2\Phi_{max}}{t_1} \\ t_2 \text{ تا } t_1 \text{ : در بازهٔ } \mathscr{E}_2=0 \\ t_3 \text{ تا } t_2 \text{ : در بازهٔ } \mathscr{E}_3=\frac{\Phi_{max}}{t_1} \end{cases} \Rightarrow \mathscr{E}_1=2\mathscr{E}_3$$

۶۸- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۴)

$$U=\frac{1}{2}LI^2 \xrightarrow[I=I_{max}]{U=U_{max}} 5\times10^{-3}=\frac{1}{2}L\times5^2 \Rightarrow L=4\times10^{-4}H$$

$$L=\frac{\mu_\circ AN^2}{\ell} \Rightarrow 4\times10^{-4}=\frac{4\pi\times10^{-7}\times20\times10^{-4}\times N^2}{6/28\times10^{-2}} \Rightarrow N=100$$

۶۹- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۳)

$$F=|q|vB\sin\theta=\frac{mv^2}{r}$$

$$r=\frac{mv}{|q|B\sin\theta} \xrightarrow{v \text{ و } B \text{ ثابت}} \left(\frac{m}{|q|}\right)_\beta<\left(\frac{m}{|q|}\right)_\alpha$$

در این سؤال بهتر بود نسبت جرم به بار دو ذره مورد مقایسه قرار می‌گرفت.

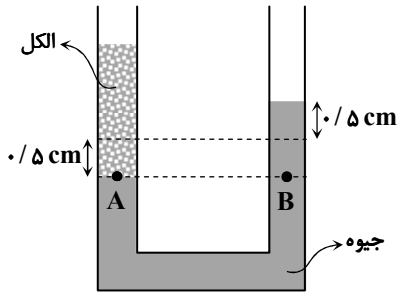
۷۰- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۱)

چگالی مخلوط را محاسبه می‌کنیم:

$$\rho' = \frac{m_A + m_B}{V_A + V_B} = \frac{۱۲+۱۲}{۱۰+۵} = ۱/۶ \frac{g}{cm^۳}$$

۷۱- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۲)

سطح جیوه در شاخهٔ سمت راست به‌اندازهٔ $۰/۵\,cm$ بالا رفته، بنابراین در شاخهٔ سمت چپ به‌اندازهٔ $۰/۵\,cm$ پایین می‌آید و اختلاف سطح جیوه در دو شاخه به $۱cm$ می‌رسد.



نقاط A و B هم‌تراز می‌باشند و فشار در این نقاط برابر است؛ بنابراین داریم:

$$P_A = P_B \Rightarrow \rho_{الکل} h_{الکل} = \rho_{جیوه} h_{جیوه} \Rightarrow ۰/۸ \times h_{الکل} = ۱۳/۶ \times ۱ \Rightarrow h_{الکل} = ۱۷\,cm \Rightarrow V_{Al} = ۱۷ \times ۲ = ۳۴\,cm^۳$$

۷۲- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۲)

با توجه به اینکه پیستون‌ها دوباره به حالت تعادل می‌رسند، داریم:

$$P_a = P_b = P_c \Rightarrow \frac{mg}{A_A} + \rho g h_A = \frac{mg}{A_B} + \rho g h_B = \frac{mg}{A_C} + \rho g h_C$$

$$A_C > A_B > A_A \Rightarrow h_C > h_B > h_A$$

۷۳- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۳)

$$W_f = E_۲ - E_۱$$

$$\begin{cases} E_۱ = K_۱ + U_۱ = \frac{۱}{۲}mv_۱^۲ + mgh = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۱۰} \times ۴^۲ + \frac{۱}{۱۰} \times ۱۰ \times ۱۰ = ۱۰/۸\,J \\ E_۲ = K_۲ = \frac{۱}{۲}mv_۲^۲ = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۱۰} \times ۱۰^۲ = ۵\,J \end{cases} \Rightarrow W_f = ۵ - ۱۰/۸ = -۵/۸\,J$$

۷۴- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۴)

حداقل مقدار بخارآب واردشده زمانی است که بخار و یخ به آب صفر درجه تبدیل شوند.

$$m_{یخ} L_F + Q_{ظرف} = m_{آب} L_V + m_{آب} c_{آب} \Delta\theta_{آب} \Rightarrow ۱۰۰ \times ۳۳۶ + ۶۵۴۰ = ۲۲۵۶ m_{آب} + ۱۰۰ \times ۴/۲ m_{آب} \Rightarrow m_{آب} = ۱۵\,g$$

۷۵- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۵)

$$P_۱V_۱ = P_۲V_۲ \Rightarrow (۱۰^۵ + \frac{۴۰}{A}) \times ۲۶A = (۱۰^۵ + \frac{۱۲۰}{A}) \times ۲۲A \Rightarrow ۴ \times ۱۰^۵ A = ۴۰ \times ۴۰ \Rightarrow A = ۴۰ \times ۱۰^{-۴} m^۲ = ۴۰ cm^۲$$

شیمی

۷۶- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۱ (فصل ۳)

ابتدا فرمول شیمیایی آلومینیم سولفات را می‌نویسیم:

$$Al^{۳+}, SO_۴^{۲-} \rightarrow Al_۲(SO_۴)_۳$$

$$\frac{\text{شمار کاتیون}}{\text{شمار آنیون}} = \frac{۲}{۳}$$

پس ترکیبی را می‌یابیم که در آن $۳ \times \frac{۲}{۳} = ۲$ الکترون مبادله شده باشد:

بار آنیون × تعداد آنیون = بار کاتیون × تعداد کاتیون = تعداد الکترون مبادله شده

$Na_۲CO_۳ = ۲ \times ۱ = ۲$

$Co_۲O_۳ = ۲ \times ۳ = ۶$

$CH_۳COOK = ۱ \times ۱ = ۱$

$HCOOLi = ۱ \times ۱ = ۱$

۷۷- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۱)

ابتدا عنصرهای فرضی داده‌شده را بشناسیم:

$A^+ : 3p^6 \Rightarrow A : [_{18}Ar]4s^1 \Rightarrow A :_{19}K$ $\quad$ $E^{3+} : 3d^5 \Rightarrow E : [Ar]3d^6 4s^2 \Rightarrow E :_{26}Fe$

$X^{2-} : 3p^6 \Rightarrow X : [_{10}Ne]3s^2 3p^4 \Rightarrow X :_{16}S$ $\quad$ $D^- : 4p^6 \Rightarrow D : [_{18}Ar]3d^{10} 4s^2 4p^5 \Rightarrow D :_{35}Br$

الف) درست؛ بین عنصرهای $_{19}K$ و $_{26}Fe$ شش عنصر وجود دارد و عنصر X (S) که در گروه ۱۶ قرار دارد، نیز دارای ۶ الکترون ظرفیت می‌باشد.

ب) نادرست؛ ترکیب حاصل دارای فرمول A_2X است و هر مول از آن با مبادلهٔ ۲ مول الکترون شکل می‌گیرد.

$$0/2\,mol\,A_2X \times \frac{2\,mol\,e^-}{1\,mol\,A_2X} \times \frac{6/02\times10^{23}\,e^-}{1\,mol\,e^-} = 2/408\times10^{23}\,e^-$$

پ) درست؛ به طور کلی نافلزها با گرفتن الکترون به آرایش گاز نجیب پس از خود که در همان دوره است می‌رسند، اما کاتیون‌های پایدار فلزی یا به آرایش گاز نجیب نمی‌رسند یا به آرایش گاز نجیب قبل از خود می‌رسند.

ت) نادرست؛ E فلز آهن است و دارای دو ظرفیت +۲ و +۳ است. پس با اتم D (برم) دو ترکیب با فرمول‌های ED_2 و ED_3 می‌سازد.

ترکیب حاصل از A^+ (پتاسیم) و X^{2-} (گوگرد) نیز به‌صورت A_2X است. پس نسبت شمار اتم‌های سازنده و به یکی از دو صورت زیر است:

$$\frac{ED_2}{A_2X} = 1 \qquad \frac{ED_3}{A_2X} = \frac{4}{3}$$

۷۸- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۱)

الف) نادرست؛ عنصر از یک نوع اتم (نه لزوماً یک ایزوتوپ) تشکیل شده است.

ب) درست؛ از ۱۱۸ عنصر شناخته شده تنها ۹۲ عنصر در طبیعت وجود دارد.

$$\frac{92}{118}\times100 \simeq \%78$$

پ) درست؛ لیتیم دارای دو ایزوتوپ Li^6 و Li^7 است که فراوانی آن‌ها به‌ترتیب ۶٪ و ۹۴٪ است.

ت) نادرست؛ در عبارت جای کلمه‌های نوترون و پروتون جابه‌جا نوشته شده است. ضمناً این قاعده همیشگی نیست و اغلب اتم‌هایی که $n \geq 1/5p$ باشد، ناپایدار هستند.

۷۹- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۱ (فصل ۲)

شکل صفحهٔ ۶۹ کتاب درسی سال دهم را ببینید.

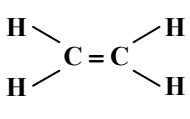
۸۰- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل‌های ۲ و ۳)

گزینهٔ ۱: درست؛ اتم هیدروژن به گاز نجیب هلیم، اتم‌های کربن و فلوئور به آرایش گاز نجیب نئون رسیده‌اند.

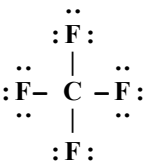
گزینهٔ ۲: نادرست؛ باید به جای کلمهٔ بار از کلمهٔ عدد اکسایش استفاده شود. C_2H_4 و CF_4 ترکیب‌های مولکولی هستند و اتم‌های سازندهٔ آن‌ها باردار نیستند.

گزینهٔ ۳: نادرست؛ از بین دو فراورده HF قطبی و CF_4 ناقطبی است، پس فراورده‌های قطبی نادرست است.

گزینهٔ ۴: نادرست؛ تعداد پیوندهای C_2H_4 از CF_4 بیشتر است:



۶ پیوند



۴ پیوند

۸۱- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۱ (فصل ۲)

$$(۱CH_۴ + ۱NH_۳ + \frac{۳}{۲}O_۲ \rightarrow ۱HCN + ۳H_۲O) \times ۲$$

$$۲CH_۴ + ۲NH_۳ + ۳O_۲ \rightarrow ۲HCN + ۶H_۲O$$

$$۲ + ۲ + ۳ + ۲ + ۶ = ۱۵$$

۸۲- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳)

بنابر صورت سؤال به دنبال ترکیب یونی هستیم که دارای یون چند اتمی باشد چرا که در یون‌های چند اتمی، اتم‌ها با پیوند کووالانسی به هم متصل هستند. پس پاسخ یا گزینهٔ ۱ است یا گزینهٔ ۳.

همچنین براساس صورت سؤال ترکیب باید محلول در آب باشد. می‌دانیم که $BaSO_۴$ یک رسوب سفیدرنگ با انحلال‌پذیری کمتر از $\frac{۰/۰۱g}{۱۰۰۰gH_۲O}$ است. پس پاسخ $Na_۲SO_۴$ خواهد بود.

به‌طور کلی شرط انحلال مادهٔ A در B این است: میانگین $A-B \geq (A-A, B-B)$

۸۳- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳)

ابتدا جرم Cl^- را محاسبه می‌کنیم:

$$?gcl^- : ۲۰۰g\,\text{محلول} \times \frac{۲/۲۲gCaCl_۲}{۱۰۰g\,\text{محلول}} \times \frac{۱molCaCl_۲}{۱۱۱gCaCl_۲} \times \frac{۲molCl^-}{۱molCaCl_۲} \times \frac{۳۵/۵gCl^-}{۱molCl^-} = ۲/۸۴gCl^-$$

جرم محلول:

$$۲۰۰g + (۱۸۰۰mL \times \frac{۱g}{۱mL}) = ۲۰۰۰g$$

$$ppm = \frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم محلول}} \times ۱۰^۶ = \frac{۲/۸۴}{۲۰۰۰} \times ۱۰^۶ = ۱۴۲۰$$

$$۳CaCl_۲ + ۲Na_۳PO_۴ \rightarrow Ca_۳(PO_۴)_۲ + ۶NaCl$$

البته از جرم $Na_۳PO_۴$ افزوده‌شده به محلول صرف‌نظر شده است:

$$?gNa_۳PO_۴ : ۲۰۰g\,\text{محلول} \times \frac{۲/۲۲gCaCl_۲}{۱۰۰g\,\text{محلول}} \times \frac{۱molCaCl_۲}{۱۱۱gCaCl_۲} \times \frac{۲molNa_۳PO_۴}{۳molCaCl_۲} \times \frac{۱۶۴gNa_۳PO_۴}{۱molNa_۳PO_۴} \simeq ۴/۳۷gNa_۳PO_۴$$

۴g در مقابل ۲۰۰۰ گرم واقعاً قابل صرف‌نظر است.

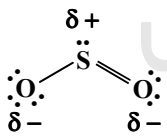
۸۴- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳) و شیمی ۳ (فصل ۳)

گزینهٔ ۱: درست؛ A و HI هر دو مولکول دو اتمی ناجورهسته، D و $SiH_۴$ هر دو مولکول‌های ناقطبی و متقارن با ۴ اتم جانبی، E و $H_۲S$ هر دو مولکول‌های قطبی با ساختار خمیده هستند.

گزینهٔ ۲: درست؛ در مولکول $H_۲O$، به‌دلیل قدرت نافلزی کمتر H نسبت به O، H دارای بار جزئی مثبت $(\delta+)$ است و به‌سمت صفحه با بار منفی جهت‌گیری می‌کند، پس صفحهٔ X دارای بار منفی است. ضمناً مولکول D ساختار متقارن دارد و ناقطبی است.

گزینهٔ ۳: نادرست

پس صفحه X بار مثبت و صفحهٔ Y بار منفی دارد.



گزینهٔ ۴: درست؛ Cl در HCl بار جزئی منفی (δ^-) دارد. در مولکول D کافی است اتم‌ها جانبی، نافلز قوی‌تری نسبت به اتم مرکزی باشند تا آن‌ها نیز بار جزئی منفی داشته باشند. (مثلا $CF_۴$)

۸۵- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۱)

ابتدا واکنش را موازنه می‌کنیم:

$$(۱KMnO_۴ + ۸HI \rightarrow ۱MnI_۲ + ۴H_۲O + ۱KI + \frac{۵}{۲}I_۲) \times ۲$$

$$۲KMnO_۴ + ۱۶HI \rightarrow ۲MnI_۲ + ۸H_۲O + ۲KI + ۵I_۲$$

در نتیجه داریم:

$$۳/۹۵gKMnO_۴ \times \frac{۱molKMnO_۴}{۱۵۸gKMnO_۴} \times \frac{۵molI_۲}{۲molKMnO_۴} \times \frac{۲۵۴gI_۲}{۱molI_۲} \times \frac{x}{۱۰۰} = ۱۲/۷gI_۲ \Rightarrow x = ٪۸۰$$

برای سهولت محاسبه:

$$\frac{۳/۹۵}{۱۵۸} = \frac{۱}{۴۰}\ ,\ \frac{۱۲/۷}{۲۵۴} = \frac{۱}{۲۰}$$

۸۶- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۲ (فصل ۱)

منابع اقیانوسی آن‌ها غنی‌تر است.

۸۷- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۲ (فصل ۱)

$$C_2H_2 + 2Br_2 \rightarrow C_2H_2Br_4$$

$$x\,mol\,C_2H_2 \times \frac{1\,mol\,C_2H_2Br_4}{1\,mol\,C_2H_2} \times \frac{346\,g}{1\,mol\,C_2H_2Br_4} = x \times 346\,g$$

$$C_nH_{2n} + Br_2 \rightarrow C_nH_{2n}Br_2$$

$$x\,mol\,C_nH_{2n} \times \frac{1\,mol\,C_nH_{2n}Br_2}{1\,mol\,C_nH_{2n}} \times \frac{14n+160}{1\,mol\,C_nH_{2n}Br_2} = x \times (14n+160)$$

$$\frac{x \times 346}{x \times (14n+160)} = 1/71$$

$$342 = 171 \times 2 \Rightarrow 346 \simeq 200 \times 1/71 \Rightarrow 14n + 160 \simeq 200 \Rightarrow n \simeq 3$$

۸۸- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۱)

ابتدا جدول زیر را در نظر بگیرید:

$$X_2 + H_2 \rightarrow 2HX$$

I	Br	Cl	F	X
۴۰۰	۲۰۰	اتاق	−۲۰۰	حداقل دمای لازم برای انجام واکنش

$$-100 \le \theta \le +100 \Rightarrow \theta < 200 \Rightarrow F, Cl$$

$$-200 \le \theta \le -50 \Rightarrow \theta < 25 \Rightarrow F$$

$$-200 \le \theta \le 250 \Rightarrow \theta < 400 \Rightarrow F, Cl, Br$$

$$-200 \le \theta \le 400 \Rightarrow \theta \le 400 \Rightarrow F, Cl, Br, I$$

۸۹- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۲)

با بررسی NH_3: معادلهٔ اول در $\frac{1}{2}$ ضرب شود.

با بررسی N_2O: معادلهٔ دوم در ۳ ضرب شود.

با بررسی حذف O_2: معادلهٔ سوم برعکس و $\frac{3}{2}$ برابر شود:

$$\Delta H = \frac{1}{2} \times (-1530) + 3 \times (-376) - \frac{3}{2} \times (-572) = -765 - 1128 + 858 = -1035\,kJ$$

۹۰- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۳)

ترکیب‌های «الف» و «ب» اسید و استر هم‌کربن با فرمول $C_4H_8O_2$ هستند و ایزومر یکدیگرند.

ترکیب‌های «پ» و «ت» کتون و آلدهید هم‌کربن با فرمول C_4H_8O هستند و ایزومر یکدیگرند.

ضمناً ترکیب «الف» امکان برقراری پیوند هیدروژنی دارد و هیچ ترکیبی جرم مولی بیشتری نسبت به آن ندارد، پس بیشترین نقطه جوش را دارد.

۹۱- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۲)

ابتدا از حجم CO به گرمای تولیدشده می‌رسیم و با کسر مقدار آن از کل گرمای آزادشده، گرمای تولیدشده را در واکنش دوم محاسبه می‌کنیم.

سپس می‌توانیم به جرم کربن برسیم:

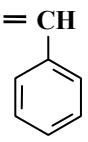
$$5/6\,L\,CO \times \frac{1\,mol\,CO}{22/4\,L\,CO} \times \frac{564\,kJ}{2\,mol\,CO} = 70/5\,kJ \qquad 201/5 - 70/5 = 131\,kJ \qquad 131\,kJ \times \frac{1\,mol\,C}{393\,kJ} \times \frac{12\,g\,C}{1\,mol\,C} = 4\,g\,C$$

۹۲- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۲ (فصل ۳)

دی آمین سازندهٔ پلیمر A:

$$H_2N - CH_2 - CH_2 - NH_2$$

مونومر سازندهٔ پلیمر B:



$$C_2H_8N_2 = 24 + 8 + 28 = 60\,g \cdot mol^{-1}$$

$$C_8H_8 = 96 + 8 = 104\,g \cdot mol^{-1}$$

$$\frac{60}{104} < \frac{60}{100} \Rightarrow \frac{60}{104} \simeq 0/58$$

۹۳- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۲ (فصل ۳) و شیمی ۳ (فصل ۲)

قبل از بررسی گزینه‌ها فرمول ترکیب را به‌دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{l}\text{آلکان هم‌کربن: } C_{14}H_{30}\\ \text{تعداد پیوند دوگانه و حلقه} \Rightarrow -18H\\ \text{دو اتم کلر} \Rightarrow -2H\\ \text{یک اتم N} \Rightarrow +H\end{array}\right\} \Rightarrow C_{14}H_{11}O_2NCl_2$$

عبارت «اول»: نادرست؛ ۱۱ اتم هیدروژن داریم که یکی به N و یکی به O متصل است، پس ۹ پیوند $C-H$ وجود دارد. همچنین در شکل، ۲ پیوند $C-N$ وجود دارد. $\frac{9}{2} \neq 5$

عبارت «دوم»: نادرست

$$\text{جرم مولی ترکیب} = (14\times12)+11+32+14+71 = 296$$

$$\%O = \frac{2\times16}{296}\times100 = \frac{32}{296}\times100 \simeq \frac{30}{300}\times100 \simeq \%10$$

عبارت «سوم»: درست

$$\left.\begin{array}{l}\text{پیوندهای دوگانه: } 6(C=C)+1(C=O)=7\\ \text{تعداد پیوند } (C-H): 9\end{array}\right\} \Rightarrow 9-7=2$$

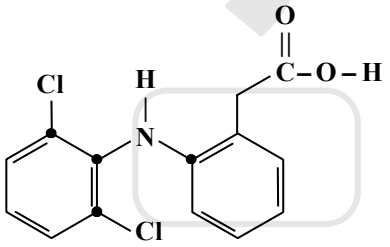
عبارت «چهارم»: درست

$$:\ddot{\underset{\cdot\cdot}{Cl}}: + 2\times \ddot{\underset{\cdot\cdot}{O}}: + 1\times \ddot{\underset{\cdot\cdot}{N}} - :$$: شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی

$$= 1+4+6 = 11$$

کربن با عدد اکسایش ۱+، یعنی کربنی که به یک نافلز قوی‌تر از خود متصل است و فاقد هیدروژن باشد. در شکل زیر این اتم‌ها مشخص شده‌اند.

نسبت خواسته‌شده: $\frac{11}{4} = 2/75$



۹۴- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۲ (فصل ۲)

ابتدا واکنش را موازنه می‌کنیم:

$$2Ca_3(PO_4)_2 + 6SiO_2 + 10C \rightarrow 6CaSiO_3 + 1P_4 + 10CO$$

گزینهٔ ۱: نادرست؛ باید نسبت مول مواد داده‌شده را بر ضریب مولی تقسیم کنیم. اگر مقادیر ترکیب یکسان باشد، درست است:

$$\frac{21g\,CO\times\frac{1mol\,CO}{28g\,CO}}{10} = \frac{3}{40}$$

$$\frac{9/3g\,P_4\times\frac{1mol\,P_4}{4\times31g\,P_4}}{1} = \frac{3}{40}$$

$$\frac{10g\,C\times\frac{1mol\,C}{12g\,C}}{10} = \frac{1}{12}$$

گزینهٔ ۲: نادرست؛ چون ضریب Si و SiO_2 برابر عدد یک نیست و سرعت متوسط آن‌ها با سرعت واکنش یکسان نمی‌باشد.

گزینهٔ ۳: نادرست؛ با توجه به کاهش تدریجی سرعت واکنش لزوماً این عبارت درست نیست.

گزینهٔ ۴: درست

$$\frac{0/4mol\,Ca_3(PO_4)_2}{2} = \frac{0/2mol\,P_4}{1}$$

۹۵- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۱)

کاهش $\left[OH^-\right]$ یعنی افزایش $\left[H^+\right]$، پس با یک اسید مواجه هستیم. شمار مولکول‌های موجود در محلول بیشتر است، یعنی یونش اسید کمتر است. پس در بین گزینه‌ها ضعیف‌ترین اسید را باید بیابیم: HCN

۹۶- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)

می‌دانیم که فوریک اسید از استیک اسید قوی‌تر است، یعنی در دمای یکسان $K_{a_1} > K_{a_2}$ است.

گزینهٔ ۱: نادرست

$$\left.\begin{matrix} M_1 < M_2 \\ K_{a_1} > K_{a_2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$ لزوماً نمی‌توان بین $\left[H^+\right]$ و pH دو محلول مقایسه کرد.

گزینهٔ ۲: نادرست

$$\left.\begin{matrix} pH_1 = pH_2 \Rightarrow \left[H^+\right]_1 = \left[H^+\right]_2 \\ K_{a_1} > K_{a_2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow M_1 < M_2 \Rightarrow M_1 - \left[H^+\right] < M_2 - \left[H^+\right]$$

در غلظت یون هیدرونیوم برابر، اسید ضعیف‌تر غلظت بیشتری خواهد داشت.

گزینهٔ ۳: نادرست

اگر دما ثابت بماند، رابطهٔ مقابل برقرار است:

$$K_a = \frac{M\alpha^2}{1-\alpha} \simeq M\alpha^2 \Rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{K_a}{M}}$$

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \sqrt{\frac{M_1}{M_2}} = \sqrt{\frac{V_2}{V_1}}$$

پس هر دو به یک نسبت تغییر غلظت دارند و به یک نسبت تغییر در درجه یونش ایجاد می‌کند.

گزینهٔ ۴: درست؛ می‌توان با تغییر غلظت (البته در حجم یکسان که به نظر باید در سؤال مطرح شود) مول‌های متفاوت ایجاد کرد.

۹۷- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

$$pH_1 = 1/4 = 2 - \log 4 \Rightarrow \left[H^+\right]_1 = 4\times10^{-2} \xrightarrow{\alpha = 1} M_1$$

$$pH_2 = 1/7 = 2 - \log 2 \Rightarrow \left[H^+\right]_2 = 2\times10^{-2} \xrightarrow{\alpha = 1} M_2$$

در کل عبارت‌های میلی‌لیتر در صورت سؤال با هم ساده می‌شوند.

$$(a\,mL \times \frac{0/04\,mol\,HA}{1L} + b\,mL \times \frac{0/02\,mol\,HA}{1L}) \times \frac{1\,mol\,NaOH}{1\,mol\,HA} \times \frac{1L}{0/3\,mol\,NaOH} = 200\,mL \Rightarrow 2a + b = 300$$

$$a + (a + b) = 300$$

براساس گزینه‌ها فقط گزینهٔ ۴ با جای‌گذاری مقدار درستی برای a ایجاد می‌کند.

۹۸- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

ابتدا یک سری الکتروشیمیایی از نیم‌واکنش‌ها را می‌نویسیم:

$$Cl_2 / 2Cl^- = 1/36\,V$$

$$Cu^+ / Cu = 0/52\,V$$

$$Sn^{4+} / Sn^{2+} = 0/15\,V$$

گزینهٔ ۱: نادرست؛ Cl^- ضعیف‌ترین کاهنده و Sn^{2+} قوی‌ترین کاهنده است.

گزینهٔ ۲: نادرست؛ واکنش $(Cu + Sn^{4+} \rightarrow)$ غیرخودبه‌خود است و emf آن منفی می‌شود.

گزینهٔ ۳: درست؛ وقتی X با Sn^{4+} به‌طور طبیعی واکنش می‌دهد یعنی پتانسیل آن از ۰/۱۵ کمتر است، پس با Cl_2 نیز واکنش می‌دهد.

گزینهٔ ۴: نادرست؛ در سری الکتروشیمی کاهندهٔ پایین‌تر با اکسندهٔ بالاتر واکنش می‌دهد، یعنی این واکنش به‌طور طبیعی انجام نمی‌شود و emf آن منفی است.

۹۹- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۲)

$C_{10}H_8 + 12O_2 \rightarrow 10CO_2 + 4H_2O$

$C_{10}H_8 : C_{10} : x \Rightarrow x + 8\times1 = 0 \Rightarrow x = -8$

$CO_2 : x + 2\times(-2) = 0 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow 10CO_2 \Rightarrow 10\times4 = 40$

تغییر عدد اکسایش $= 40 - (-8) = 48$

نسبت خواسته‌شده : $\frac{48}{-8} = -6$

۱۰۰- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۲)

کاتیون فلز M را به‌صورت M^{n+} در نظر می‌گیریم:

$M^{n+} + ne^- \rightleftharpoons M$

$2\,mol\,M \times \frac{n\,mol\,e^-}{1\,mol\,M} \times \frac{6/02\times10^{23}\,e^-}{1\,mol\,e^-} = 3/612\times10^{24}\,e \Rightarrow n = 3$

از ظاهر سؤال معلوم نیست که M یا Cu کدام‌یک آند یا کاتد است، بنابراین واکنش را دو طرفه می‌نویسیم:

$2M + 3Cu^{2+} \rightleftharpoons 2M^{3+} + 3Cu \Rightarrow \quad 2\,mol\,M \sim 3\,mol\,Cu$

$\frac{3\times64}{x\times M} = 1/84 \Rightarrow M = \frac{3\times32}{1/84} \simeq 52$

۱۰۱- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۳)

جدول با هم بیندیشیم صفحهٔ ۸۷ کتاب درسی شیمی ۳:

ویژگی / ماده	تیتانیم	فولاد
نقطهٔ ذوب (°C)	۱۶۶۷	۱۵۳۵
چگالی ($g\cdot mL^{-1}$)	۴/۵۱	۷/۹۰
واکنش با ذره‌های موجود در آب دریا	ناچیز	متوسط
مقاومت در برابر خوردگی	عالی	ضعیف
مقاومت در برابر سایش	عالی	عالی

۱۰۲- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۲) و شیمی ۳ (فصل ۳)

بررسی موارد:

الف) نادرست؛ ترکیب D و J، LiF و ترکیب G و D، LiBr است.

شعاع Br^- از F^- بیشتر و چگالی بار آن کمتر است، پس آنتالپی فروپاشی LiF بیشتر است.

ب) نادرست؛ ترکیب حاصل از Z و E در شرایط مناسب CO_2 و ترکیب حاصل A و E در شرایط مناسب CH_4 است. هر دو ترکیب ناقطبی هستند، اما جرم مولی CO_2 از CH_4 بیشتر است؛ پس نیروی واندروالسی قوی‌تر و نقطه جوش بالاتری دارد.

پ) درست

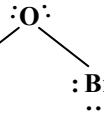
A, G ⇒ HBr قطبی

E, Z ⇒ CO_2 ناقطبی

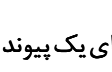
$\mu_{HBr} > \mu_{CO_2} = 0$

ت) درست

Z, G ⇒ OBr_2 دارای دو پیوند



A, J ⇒ HF دارای یک پیوند



۱۰۳- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۴)

شرایط انجام واکنش‌ها در فرایند هابر: دمای ۴۵۰°C، فشار ۲۰۰ اتمسفر و استفاده از کاتالیزگر ورقهٔ آهنی

ضمناً در حین انجام فرایند از طریق میعان NH_3، آن را پیوسته جداسازی می‌کنند تا بنابر اصل لوشاتلیه واکنش در جهت تولید بیشتر فراورده جابه‌جا شود.

۱۰۴- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۴)

	$۴X$	+	Y	$\rightleftharpoons$	$۲M$	+	$۲Z$
اولیه	a		a		۰		۰
تغییرات	$-۴b$		$-b$		$+۲b$		$+۲b$
تعادل	$a-۴b$		$a-b$		$۲b$		$۲b$

$$\left.\begin{matrix} a-۴b=۰/۰۲ \\ a-b=۰/۰۸ \end{matrix}\right\} \Rightarrow b=۰/۰۲, a=۰/۱$$

$$K=\frac{[M]^۲[Z]^۲}{[X]^۴[Y]^۱}=۲۵=\frac{(۰/۰۴)^۲\times(۰/۰۴)^۲}{(۰/۰۲)^۴\times ۰/۰۸}\times\frac{\frac{۱}{V^۴}}{\frac{۱}{V^۵}}$$

$$۲۵=\frac{۱۶}{۰/۰۸}\times V \Rightarrow V=\frac{۲۵}{۲۰۰}=\frac{۱}{۸}L=۱۲۵\,mL$$

۱۰۵- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۴)

با افزایش (کاهش حجم) فشار تعادل به سمت تولید مول گاز کمتر، یعنی در جهت رفت جابه‌جا می‌شود و $[AD]$ افزایش می‌یابد. بنابراین $P_۲ > P_۱$ است. ضمناً افزایش دما باعث جابه‌جایی تعادل در جهت مصرف گرما و کاهش $[AD]$ شده است. پس تعادل گرماده است. در تعادل گرماده، دما و ثابت تعادل با هم رابطهٔ عکس دارند.

مؤسسه آموزشی فرهنگی